

Etude des graphes minimaux pour l'échange total

**Mémoire de D.E.A.
LaBRI
Responsable : Olivier Baudon**

Guillaume FERTIN

Juin 1995

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Olivier Baudon pour son suivi constant et son soutien sans faille durant ces six mois.

Merci également à André Raspaud et Eric Sopéna pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à mon égard.

Merci aussi à Anne Bottreau pour sa disponibilité légendaire, et à Wilfried Laurent et Andy Cairns qui ont su m'épauler quand il le fallait.

Et un salut amical à Jérôme.

Sommaire

1	Introduction	4
2	Définitions et notations	5
2.1	Définitions	5
2.1.1	La diffusion	5
2.1.2	L'échange total	7
2.2	Résultats connus	7
2.2.1	Résultat immédiat	8
2.2.2	La diffusion	8
2.2.3	L'échange total	9
2.3	Notations et vocabulaire	11
2.3.1	Notations diverses	11
2.3.2	Définitions et remarques	12
2.3.3	Notion de MBT et de RBT	12
2.3.4	Les Minimum Broadcast Trees (MBT)	12
2.3.5	Les Reverse Broadcast Trees (RBT)	14
2.3.6	Nombre de sommets des MBT et RBT	15
3	Structure des MGG_n	17
3.1	Les sommets de degré 1 dans un MGG_n	17
3.2	Les isthmes dans un MGG_n	19
3.3	Arêtes incidentes à un sommet de degré 2 dans un MGG_n	21
3.4	Arêtes de type (1,3)	23
3.5	Adjacence de sommets de degré 2 dans un MGG_n	23
3.5.1	Adjacence de sommets de degré 2 dans un MGG_{2m}	23
3.5.2	Adjacence de sommets de degré 2 dans un MGG_{2m+1}	24
4	Bornes pour $G(n)$	28
4.1	Construction de graphes d'échange total à partir de MGG existants	28
4.1.1	Propriété immédiate	28
4.1.2	Composition d'un MGG_n par un MGG_n	28
4.1.3	Graphes d'échange total à $2n + 1$ sommets	30
4.1.4	Arêtes de type (1, p) dans un MGG_n	32
4.2	Bornes inférieures pour $G(n)$	34
4.2.1	Propriété immédiate	34
4.2.2	Bornes inférieures pour $G(2m)$	34

4.2.3	Bornes inférieures pour $G(2m + 1)$	36
5	Etude de cas particuliers	40
5.1	Dénombrement des MGG_n pour $1 \leq n \leq 12$	40
5.1.1	Dénombrement des MGG_n pour $1 \leq n \leq 4$	40
5.1.2	Dénombrement des MGG_n pour $5 \leq n \leq 8$	41
5.1.3	Dénombrement des MGG_n pour $9 \leq n \leq 12$	42
5.2	Recherche de $G(13)$ et $G(15)$	44
5.2.1	Première approche	44
5.2.2	Détermination de $G(13)$	45
5.2.3	Détermination de $G(15)$	48
5.3	Recherche de $G(n)$ pour $17 \leq n \leq 32$	49
5.3.1	Recherche de $G(17)$ et $G(19)$	49
5.3.2	Bornes pour $G(n)$ avec $17 \leq n \leq 32$	52
6	Problèmes ouverts	55
6.1	Collusions entre MBG et MGG	55
6.2	Graphes contenant des MGG	56
6.3	Autres problèmes	57
7	Conclusion	58
8	Annexe	59
8.1	Résumé des connaissances	59
8.2	Les différents MGG_{12}	60

Chapitre 1

Introduction

Les problèmes d'échange total et de diffusion sont étroitement liés, et concernent tous deux les communications entre processeurs dans une architecture parallèle. La recherche concernant la diffusion est sensiblement plus avancée que celle concernant l'échange total. Toutefois, l'utilité des graphes d'échange minimaux vis-à-vis des architectures parallèles conduit à s'intéresser de plus en plus à ceux-ci.

Il s'agit donc, dans ce mémoire, de faire le point sur la recherche sur les graphes minimaux, qu'ils soient de diffusion ou d'échange total, et de rechercher de nouveaux graphes minimaux pour l'échange total, soit ayant un petit nombre de sommets, soit obtenus par construction.

Nous allons tout d'abord définir précisément les notions de diffusion et d'échange total - ainsi que celles des graphes minimaux associés -, avant de passer rapidement en revue les différents résultats déjà connus concernant l'un et l'autre.

Puis nous démontrerons divers résultats sur la structure des graphes d'échange total et leur nombre d'arêtes.

Enfin, nous nous pencherons sur différents cas particuliers, en abordant notamment les cas des graphes minimaux d'échange total ayant un nombre de sommets inférieur à 16.

Chapitre 2

Définitions et notations

2.1 Définitions

On modélise une architecture parallèle à l'aide de graphes, où les sommets représentent des processeurs et les arêtes les liens de communication. On considèrera par la suite uniquement des graphes connexes sans boucle.

2.1.1 La diffusion

Chaque nœud - ou processeur - du graphe considéré au départ contient une information. Une diffusion, en anglais *broadcast* ou *one-to-all*, consiste pour un processeur u donné à envoyer l'information qu'il possède à l'instant $t = 0$ à l'ensemble des processeurs de l'architecture via les liens de communication représentés par les arêtes.

On se placera dans un modèle temps constant, 1-port et full-duplex, c'est-à-dire qu'on considère comme acquises les suppositions suivantes :

- chaque envoi de message d'un nœud à son voisin se fait en une unité de temps ;
- tout sommet ne peut communiquer qu'avec un seul de ses voisins à la fois ;
- si une arête joint un sommet u à un sommet v , alors la communication peut tout aussi bien se faire de u vers v que de v vers u .

Cette dernière supposition implique que les graphes considérés soient également sans arête multiple et non orientés.

Bien entendu, plusieurs communications peuvent avoir lieu simultanément sur tout ensemble d'arêtes indépendantes, c'est-à-dire sur tout ensemble d'arêtes mettant à contribution des sommets distincts deux à deux (couplage).

Pour tout sommet u d'un graphe G , on désigne par *temps de diffusion* de u , noté $b(u)$, le temps minimum nécessaire à u pour effectuer la diffusion dans G . De plus, on appellera *temps de diffusion du graphe* G , ou $b(G)$, le maximum des temps de diffusion sur l'ensemble des sommets du graphe.

Si on suppose que G est d'ordre n , alors on peut en déduire immédiatement que $b(u) \geq \lceil \log_2(n) \rceil$, puisque le nombre de sommets informés peut au plus doubler à chaque unité de temps.

De plus, s'il existe un lien de communication entre toute paire de processeurs, c'est-à-dire si l'on considère le graphe complet K_n , le temps minimum pour effectuer une diffusion, quel que soit le sommet de départ, est de $\lceil \log_2(n) \rceil$.

Dans ce cas, $b(G)$, le temps de diffusion du graphe, est tel que :

$$b(G) = \max\{b(u) \mid u \in G\} = \lceil \log_2(n) \rceil$$

Un tel graphe, c'est-à-dire un graphe capable d'effectuer la diffusion en temps $\lceil \log_2(n) \rceil$, est appelé *graphe de diffusion*.

Il n'est pas nécessaire d'avoir le graphe complet K_n pour que $b(G) = \lceil \log_2(n) \rceil$. On désigne alors par *graphe de diffusion minimal*, en anglais *Minimum Broadcast Graph* ou *MBG*, tout graphe de diffusion ayant un nombre minimum d'arêtes, et on désigne alors ce nombre par $B(n)$.

Remarque : Par la suite, on emploiera toujours la notation "MBG" pour désigner un graphe de diffusion minimal.

Exemple : Pour $n = 5$, le graphe G_1 de la figure 2.1 ci-dessous est MBG.

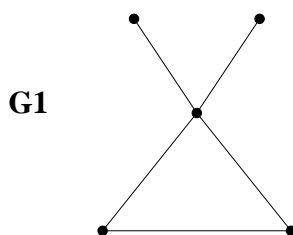


Figure 2.1: Un MBG à 5 sommets

En effet, on voit facilement que $b(G_1) = 3$, c'est-à-dire que tout point du graphe est capable de diffuser en trois unités de temps. De plus, $\lceil \log_2(5) \rceil = 3$, donc G_1 est graphe de diffusion. Enfin, les seuls graphes connexes à cinq sommets et quatre arêtes sont, outre la chaîne P_5 qui diffuse en cinq unités de temps, les deux graphes G_2 et G_3 de la figure 2.2.

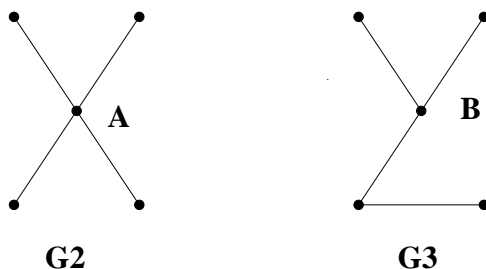


Figure 2.2: Deux graphes G_1 et G_2 pour lesquels $b(G_i) \geq 4$

Or, G_2 n'est pas graphe de diffusion car $b(A) = 4$ (ce qui implique $b(G_2) \geq 4$). De la même manière, G_3 n'est pas graphe de diffusion car $b(B) = 4$.

2.1.2 L'échange total

Un échange total - en anglais *gossip* ou *one-to-all* - consiste à diffuser l'ensemble des informations de chaque processeur sur tous les processeurs de l'architecture. Ainsi, à la fin de l'échange total, la totalité des informations sera présente dans la mémoire locale de chaque processeur.

Tout comme pour la diffusion, on se place dans un modèle temps constant, 1-port et full-duplex.

On désigne par $g(G)$ le temps d'échange total dans un graphe G .

Tout d'abord, on peut remarquer que, puisque l'échange total nécessite au moins la diffusion, on a nécessairement l'inégalité suivante : $g(G) \geq b(G)$.

De plus, si l'on se place dans le graphe complet K_n , Knodel [11] a démontré que le temps d'échange total valait :

- $\lceil \log_2(n) \rceil$ si n est pair ;
- $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$ si n est impair.

En effet, dans le cas où l'ordre du graphe G est impair, un des n sommets ne pourra pas communiquer lors de la première unité de temps, les $(n - 1)$ sommets restants s'étant déjà formés par paires. Ce sommet pourra alors au mieux diffuser son information en $\lceil \log_2(n) \rceil$, mais seulement à partir de la deuxième unité de temps.

Un tel graphe, capable de pratiquer l'échange total en $\lceil \log_2(n) \rceil$ pour n pair (respectivement en $\lceil \log_2(n) \rceil + 1$ pour n impair), est appelé *graphe d'échange total*.

De même que pour la diffusion, il n'est pas nécessaire d'être en présence du graphe complet K_n pour obtenir un graphe d'échange total. On désigne alors par *graphe d'échange total minimal*, en anglais *Minimum Gossip Graph* ou *MGG*, tout graphe d'échange total ayant un nombre minimum d'arêtes. On désignera ce nombre d'arêtes par $G(n)$.

Remarque : De la même manière, on emploiera toujours par la suite le terme "MGG" pour désigner un graphe d'échange total minimal.

Exemples :

1. Pour $n = 4$, le graphe de la figure 2.3 est MGG. En effet, $g(G_1) = 2$, et, qui plus est, $\lceil \log_2(4) \rceil = 2$, donc G_1 est graphe d'échange total. Or, la chaîne à quatre sommets P_4 n'est pas graphe d'échange total, car la distance de A à B (les deux extrémités de la chaîne) est égale à 3. De la même manière, l'étoile à trois branches nécessite trois unités de temps pour diffuser, et n'est donc pas graphe d'échange total.
2. Pour $n = 4$ également, le graphe de la figure 2.4 n'est pas MGG. On voit en effet aisément que A ne peut diffuser en deux unités de temps (il lui en faut au minimum trois). La diffusion étant nécessaire pour obtenir l'échange total, on sait alors que $g(G_2) \geq 3$.

2.2 Résultats connus

Ce paragraphe a pour but non pas de montrer tous les résultats obtenus à propos des MBG et des MGG, mais d'en exposer les plus importants et les plus représentatifs, de manière à se rendre compte de l'avancée des recherches.

Ainsi, les démonstrations de ces propriétés ne seront vues que rapidement et ne seront en

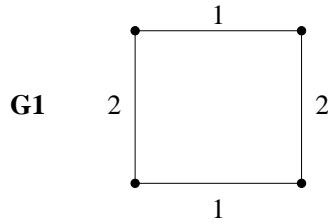


Figure 2.3: Un MGG à 4 sommets

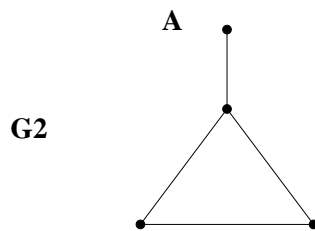


Figure 2.4: Un graphe G_2 pour lequel $g(G_2) \geq 3$

aucun cas à considérer comme complètes. Cependant, les idées directrices en seront dégagées afin de permettre une meilleure compréhension dans l'approche du problème des MBG et des MGG. De plus, certaines de ces propriétés nous seront utiles par la suite.

2.2.1 Résultat immédiat

La première propriété découlant directement des définitions ci-dessus est la suivante :

Propriété : Pour tout n pair, $G(n) \geq B(n)$.

En effet, quel que soit l'ordre du graphe, l'échange total nécessite au moins la diffusion. Or, pour n pair, les temps d'échange total et de diffusion étant les mêmes, le nombre d'arêtes dans un MGG est donc nécessairement supérieur ou égal au nombre d'arêtes dans un MBG.

2.2.2 La diffusion

Propriétés générales

Propriété (Farley, Hedetniemi, Mitchell, Proskurowski - 1979 [6]) :

$$\text{Pour tout } n = 2^k, B(n) = k \times 2^{k-1}.$$

En effet, si $n = 2^k$, alors le temps de diffusion t vaut $t = \lceil \log_2(n) \rceil = k$. Donc, il est nécessaire que le degré de chaque sommet du MBG à n sommets soit égal à k si l'on veut que les 2^k sommets soient informés en temps k . D'où la première inégalité : $B(n) \geq k \times 2^{k-1}$.

Or, Q_k , l'hypercube de dimension k , est un graphe de diffusion, et il possède $k \times 2^{k-1}$ arêtes.

Ce qui nous donne la deuxième inégalité : $B(n) \leq k \times 2^{k-1}$.

Les deux inégalités combinées nous donnent alors la propriété ci-dessus.

Propriété (Dinneen, Fellows, Faber - 1991 [4]) :

$$\text{Pour tout } n = 2^k - 2 \text{ (} k \geq 3 \text{), } B(n) = (k - 1) \times (2^{k-1} - 1).$$

De la même manière que précédemment, ceci se prouve en trouvant une borne inférieure pour $B(n)$, pour laquelle on trouve une construction qui permet au graphe correspondant de pratiquer la diffusion en temps voulu.

Cependant, la difficulté du problème concernant la recherche de propriétés sur les MBG est l'absence d'expression générale pour $B(n)$, hormis celles fournies par les propriétés ci-avant. En particulier, on ne sait pas construire de MBG pour une valeur quelconque de n .

Tableau de résultats connus [9, 12, 18]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$B(n)$	0	1	2	4	5	6	8	12	10	12	13
Nb MBG	1	1	1	1	4	1	1	4	6	21	2
n	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	63
$B(n)$	15	18	21	24	32	22	23	26	28	31	162
Nb MBG	1*	1*	2*	3*	8*	5*	1*	1*	1*	1*	1*

Figure 2.5: Résultats connus

Remarque : Les valeurs marquées d'un astérisque correspondent au nombre de MBG connus à ce jour.

2.2.3 L'échange total

Propriétés générales (Labahn - 1991) [13]

Les trois propriétés suivantes, démontrées par Labahn, s'énoncent comme suit.

Propriétés :

1. Pour $n = 2^k$, $G(n) = k \times 2^{k-1}$;
2. Pour $n = 2^k - 2$ ($k \geq 4$), $G(n) = (k - 1) \times (2^{k-1} - 1)$;
3. Pour $n = 2^k - 4$ ($k \geq 4$), $G(n) = (k - 1) \times (2^{k-1} - 2)$.

Le premier de ces trois résultats découle de la même réflexion que celle concernant la diffusion : chaque sommet étant au moins de degré k - puisque l'échange total nécessite la diffusion -, on en déduit une première inégalité. Puis, de manière analogue à la preuve concernant la diffusion, on montre qu'il existe un schéma qui permet à l'hypercube de dimension k de pratiquer l'échange total en temps k . Ainsi, l'égalité est prouvée.

La propriété suivante est, de la même manière, basée sur une preuve analogue à celle démontrant la propriété pour les MBG. En effet, n étant pair, et partant de la propriété du paragraphe 2.2.1, on sait que $G(n) \geq B(n) = (k - 1) \times (2^{k-1} - 1)$. De plus, la construction donnée par Dinneen, Fellows et Faber [4] pour obtenir un MBG à $2^k - 2$ sommets reste valable pour l'échange total. L'égalité est alors démontrée.

La troisième des propriétés se prouve de manière analogue aux deux autres, en obtenant une borne inférieure pour $G(n)$, qui est atteinte en donnant un exemple de MGG - via un algorithme de construction - qui atteint cette borne.

Echange total dans un arbre (Labahn - 1984) [14]

Propriété : Dans un arbre à n sommets, le temps d'échange total, t_n , vérifie l'inégalité :

$$t_n \geq 2 \times \lceil \log_2(n) \rceil - 1.$$

Cette propriété se démontre en trois temps : tout d'abord, il s'agit de montrer que dans tout arbre pratiquant l'échange total en temps minimum, toutes les arêtes sont valuées par au plus deux unités de temps. En effet, s'il en existe d'autres, elles seront inutiles, voire "handicapantes" pour ses arêtes adjacentes.

Ensuite, on démontre qu'il existe toujours dans un arbre pratiquant l'échange total une arête valuée par une unité de temps et une seule. En effet, supposons que toutes les arêtes de l'arbre soient valuées par deux unités de temps ; en considérant alors dans l'arbre la plus petite valuation t_1 possible d'une arête P_1P_2 telle que P_1 et P_2 soient experts - c'est-à-dire qu'ils connaissent la totalité des informations des autres sommets du graphe - au temps t_1 , on montre qu'il est impossible que P_1P_2 soit valuée par une autre unité de temps inférieure à t_1 . De plus, toute unité de temps supérieure à t_1 est inutile, puisque t_1 suffit à avoir un échange complet d'informations.

Enfin, considérons cette arête, P_1P_2 , et supposons qu'elle soit valuée par l'unité de temps t_1 dans un arbre effectuant l'échange total en temps t .

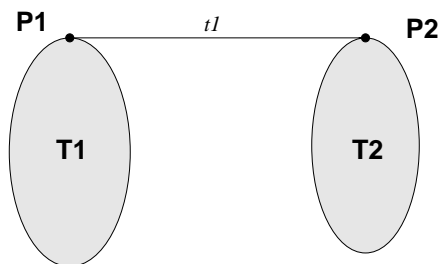


Figure 2.6: Arbre T_n pour lequel $P_1P_2 = \{t_1\}$

Nécessairement, pour que l'arbre puisse pratiquer l'échange total, il faut que P_1 et P_2 soient experts au temps t_1 .

Supposons que $|V(T_1)| \geq n/2$, c'est-à-dire que T_1 possède la moitié - ou plus - des sommets. Alors, deux inégalités se déduisent de ces remarques et suppositions :

1. T_1 effectue nécessairement une diffusion en temps $(t_1 - 1)$ - de façon à "remonter" l'information vers P_1 -. Ce qui nous donne :
 $t_1 - 1 \geq \lceil \log_2(|V(T_1)|) \rceil$, c'est-à-dire $t_1 - 1 \geq \lceil \log_2(n/2) \rceil$, ou encore $t_1 - 1 \geq \lceil \log_2(n) \rceil - 1$ (1).

2. De la même manière, la “descente” de l’information de P_1 vers T_1 implique que la diffusion se fasse en temps $(t - t_1)$ dans T_1 . Ce qui nous donne l’inégalité suivante :

$$t - t_1 \geq \lceil \log_2(|V(T_1)|) \rceil, \text{ c'est-à-dire } t - t_1 \geq \lceil \log_2(n) \rceil - 1 \quad (2).$$

En sommant les inégalités (1) et (2), on obtient l’inégalité suivante : $t - 1 \geq 2 \times \lceil \log_2(n) \rceil - 2$, ou encore $t \geq 2 \times \lceil \log_2(n) \rceil - 1$, qui n’est autre que la propriété ci-dessus.

Tableau de résultats pour $1 \leq n \leq 16$ [9]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$G(n)$	0	1	2	4	5	6	7	12	9	13	11	18	17	21	19	32
Nb MGG	1	1	1	1	2	1	1	2	6	3	1	9	1*	1	1*	8*

Figure 2.7: Résultats connus

Remarques :

1. Les valeurs marquées d’un astérisque correspondent au nombre de MGG connus à ce jour.
2. Outre les valeurs reportées dans le tableau ci-dessus, les seules valeurs de $G(n)$ connues sont celles données au paragraphe 2.2.3.
3. Enfin, de la même manière que pour la diffusion, il n’existe pas d’expression générale pour $G(n)$ - hormis pour les quelques cas particuliers correspondant aux propriétés du paragraphe 2.2.3 - ni d’algorithme de construction de MGG à n sommets pour une valeur de n donnée.

2.3 Notations et vocabulaire

Cette partie a pour but de donner différentes définitions et indications sur les notations et le vocabulaire employés par la suite, afin de clarifier les explications.

2.3.1 Notations diverses

- On désigne par MGG_n (respectivement MBG_n) un graphe d’échange total minimal (respectivement un graphe de diffusion minimal) d’ordre n .
- Soit A et B deux sommets d’un graphe joints par une arête. On désignera cette arête par le nom AB , et on désignera le nombre d’unités de temps différentes valant cette arête par $|AB|$.
- Si une arête AB est évaluée par les unités de temps $t_1, t_2 \dots t_p$ - et uniquement par celles-ci - , on explicitera ceci de la manière suivante :

$$AB = \{t_1, t_2 \dots t_p\}$$

- De la même manière, si l'arête AB est valuée par les unités de temps $t_1, t_2 \dots t_k$, mais qu'elle peut éventuellement l'être par d'autres unités de temps, on explicitera ceci de la manière suivante :

$$t_1, t_2 \dots t_k \in AB$$

- Par la suite, on confondra toujours les noms des sommets d'un graphe (A, B , etc.) avec l'information contenue dans les processeurs qu'ils représentent.
- On appellera "**arête de type (1,p)**" toute arête AB reliant un sommet A de degré 1 au reste du graphe, B étant de degré p .
Remarque : p étant le degré du sommet B , l'arête AB est bien entendue comptée parmi les p arêtes incidentes à B .

2.3.2 Définitions et remarques

- Un sommet A d'un graphe G est appelé **expert** si et seulement si ce sommet connaît les informations de tous les autres sommets que contient G . Ainsi, si A est expert au temps t , alors tous ses voisins avec qui il communique à des temps supérieurs à t deviendront à leur tour expert.
- Deux arêtes ayant un sommet commun ne peuvent avoir toutes deux une même valuation d'unités de temps.
Par exemple, si l'unité de temps t est telle que $t \in AB$, alors $\forall C, t \notin AC$.
- De façon analogue, si l'unité de temps t value l'arête AB , alors il est inutile de la valuer avec l'unité de temps $t + 1$.
En effet, si A et B échangent les informations qu'ils possèdent au temps t , ils le font à l'exclusion de tout autre sommet, c'est-à-dire qu'aucun autre sommet ne pourra communiquer directement avec A ou B au t -ième temps (c'est l'hypothèse du modèle 1-port). Ainsi, si A et B échangent de nouveau les informations qu'ils possèdent au temps $t + 1$, ils ne se communiqueront rien de plus que ce qui a été échangé au temps t et, en outre, empêcheront des communications sur les autres arêtes issues de A et de B .

2.3.3 Notion de MBT et de RBT

Par la suite, en vue de démontrer différentes propriétés concernant les MGG, il sera nécessaire de se pencher sur les deux questions suivantes : un sommet A d'un graphe G est-il capable de diffuser dans G en temps t ? Et inversement : un sommet A d'un graphe G est-il capable de recevoir les informations de chacun des autres sommets de G en temps t ? (Les communications se faisant bien entendu via les arêtes existantes et suivant les hypothèses du modèle considéré).

Ces deux questions, qui resteront présentes sans cesse par la suite, peuvent être élucidées par l'utilisation des "Minimum Broadcast Trees" et des "Reverse Broadcast Trees" .

2.3.4 Les Minimum Broadcast Trees (MBT)

Définition

Considérons un graphe G à n sommets. On voudrait savoir si ce graphe G permet l'échange total en temps t . La plupart du temps, on connaîtra quelques propriétés de G , que ce soit le(s)

degré(s) d'un ou plusieurs de ses sommets, ou encore la valuation de certaines de ses arêtes, ou bien les deux.

Pour que G puisse pratiquer l'échange total en t unités de temps, il est nécessaire que chacun des sommets de G soit capable de diffuser en temps t , et en particulier les sommets sur lesquels des hypothèses sont faites.

On appelle alors *arbre de diffusion* - en anglais *Minimum Broadcast Tree*, noté *MBT* - de racine A , un arbre de racine A qui, en respectant les hypothèses faites sur les sommets et arêtes de G , diffuse son information à un nombre maximum de sommets en temps t .

Remarques :

- L'appellation **Minimum** Broadcast Tree concernant un arbre ayant un nombre maximum de sommets peut paraître paradoxale. Cependant, elle s'explique par le fait que l'on désire voir faite cette diffusion en temps minimum.
- Par la suite, on utilisera toujours la notation **MBT** pour désigner un Minimum Broadcast Tree.

Exemple 1 Supposons que dans un graphe G d'ordre 15, que l'on voudrait MGG_{15} , on ait un sommet A de degré 1 relié au reste du graphe par l'arête AB . Supposons que cette arête vérifie $AB = \{1, 5\}$ et que B soit de degré 3. Si l'on construit le MBT de racine A , on obtient l'arbre représenté à la figure 2.8.

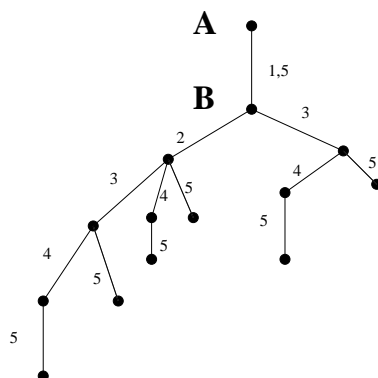


Figure 2.8: MBT - Exemple 1

On s'aperçoit alors que cet arbre est à 14 sommets, c'est-à-dire que, sous les hypothèses faites, A ne peut diffuser en temps 5 à tout le reste du graphe. Donc au moins une des hypothèses ci-dessus est fausse.

Exemple 2 Dans un graphe à 7 sommets, que l'on voudrait MGG_7 , on voudrait savoir s'il peut exister un sommet A de degré 2 pour lequel aucune des deux arêtes qui lui sont incidentes ne serait évaluée par le temps 1. Si l'on construit le MBT de racine A , on obtient l'arbre représenté à la figure 2.9.

Cet arbre est à 7 sommets, donc, a priori, dans un MGG_7 , il peut exister un sommet de degré 2 pour lequel aucune des deux arêtes qui lui sont incidentes n'est évaluée par le temps 1.

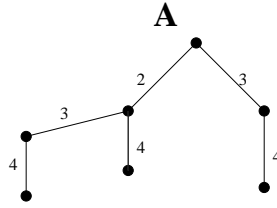


Figure 2.9: MBT - Exemple 2

2.3.5 Les Reverse Broadcast Trees (RBT)

Définition

De la même manière, considérons un graphe G à n sommets, pour lequel on aimerait savoir s'il est capable de pratiquer l'échange total en temps t , tout en connaissant quelques propriétés sur les degrés de certains de ses sommets et/ou les valuations de certaines de ses arêtes.

Pour que G puisse pratiquer l'échange total en t unités de temps, il est nécessaire que tous ses sommets puissent être informés du "contenu" de chacun des autres sommets en temps t . Ceci est notamment vrai pour les sommets sur lesquels certaines hypothèses sont faites.

On appelle alors *arbre de recouvrement* - en anglais *Reverse Broadcast Tree*, noté *RBT* - de racine A tout arbre de racine A qui, via les hypothèses faites sur les sommets et arêtes de G , "ramène à lui" l'information d'un nombre maximum de sommets en temps t .

Remarques :

- Le RBT peut être vu, de manière à clarifier les choses, comme un "MBT à l'envers", ou plutôt comme un symétrique du MBT vis-à-vis des valuations.
- Par la suite, on emploiera toujours la notation **RBT** pour désigner un Reverse Broadcast Tree.

Exemple

Supposons, comme dans l'exemple 1 concernant les MBT, que l'on ait un graphe à 15 sommets que l'on voudrait MGG_{15} . Supposons également qu'il existe un sommet A de degré 1 relié au reste du graphe par l'arête AB , avec B de degré 3 et $AB = \{1, 5\}$. Ce graphe peut-il pratiquer l'échange total?

On sait déjà que la réponse est négative, et cela a été prouvé en construisant le MBT de racine A . Mais ceci peut également être montré en construisant le RBT de racine A , ainsi que le montre la figure 2.10.

Cet arbre possède 14 sommets, donc A est incapable de "remonter" l'information des quatorze autres sommets à lui. Sous ces hypothèses, le graphe G ne peut donc pas être MGG.

Remarque : Une condition nécessaire pour qu'un graphe G soit MGG d'ordre n est que les MBT et RBT de chacun des sommets du graphe soient tous à n sommets au moins. Cependant, cette condition est loin d'être suffisante, puisqu'elle ne tient pas compte du nombre

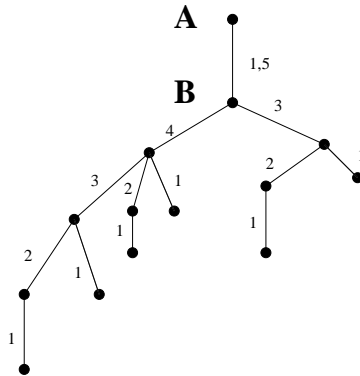


Figure 2.10: Un exemple de RBT

d'arêtes du graphe, et également car les différentes valuations des arêtes de chacun des MBT et RBT peuvent s'avérer incompatibles.

2.3.6 Nombre de sommets des MBT et RBT

Cette partie a pour but d'explicitier, par une formule mathématique simple, le nombre de sommets d'un MBT et d'un RBT dans le cas général. En effet, par la suite il nous sera nécessaire de compter ces sommets afin de démontrer différentes propriétés concernant les MGG.

Nombre de sommets d'un MBT

Comme les hypothèses concernant la "nature" de la racine de tels arbres (degré de la racine et valuation des arêtes incidentes) seront nombreuses et variées, il s'agit tout simplement ici de dénombrer les sommets d'une branche du MBT, c'est-à-dire d'un sous-arbre.

Soit A un sommet d'un MBT, et soit AB une des arêtes incidentes à A . Supposons que, dans le MBT, AB soit valuée par le temps t_1 . Alors, si le temps d'échange total est t , le sous-arbre que l'on considèrera sera celui présenté à la figure 2.11.

Et le nombre de sommets N de ce sous-arbre sera : $N = 2 + \sum_{p=t_1+1}^t 2^{t-p}$ (le chiffre 2 concernant les sommets A et B), c'est-à-dire $N = 2 + \sum_{p=1}^{t-t_1-1} 2^p$, ou encore $N = 2^{t-t_1} + 1$.

Nombre de sommets d'un RBT

De la même manière, et sous les mêmes hypothèses, on obtient le sous-arbre de la figure 2.12.

Le nombre N de sommets de ce sous-arbre vaut alors : $N = 2 + \sum_{p=1}^{t_1-2} 2^p$, c'est-à-dire $N = 2^{t_1-1} + 1$.

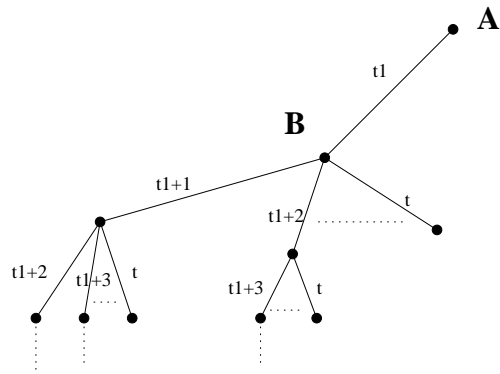


Figure 2.11: Dénombrement des sommets d'un MBT

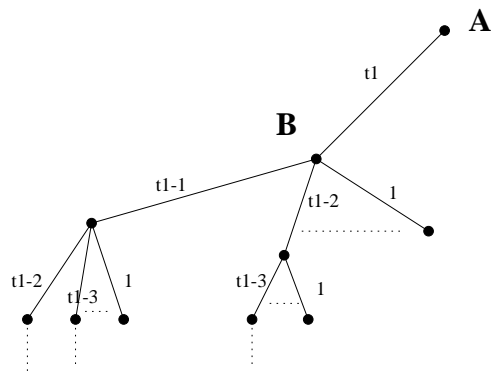


Figure 2.12: Dénombrement des sommets d'un RBT

Chapitre 3

Structure des MGG_n

Dans le but de rechercher de nouveaux MGG, et, par delà, de déterminer de nouvelles propriétés les concernant, plusieurs directions peuvent être prises. Elles tournent cependant autour de deux axes centraux :

- Une étude de la structure de tels graphes, consistant notamment à se pencher sur les degrés des sommets d'un MGG_n et sur les valuations de ses arêtes en fonction de ces degrés.
- Une étude basée sur la recherche de bornes pour $G(n)$.

Les deux études se complétant de façon à obtenir des valeurs exactes de $G(n)$ dont découle l'obtention de nouveaux MGG à n sommets.

3.1 Les sommets de degré 1 dans un MGG_n

Remarque : un résumé des principaux résultats qui vont être démontrés par la suite est disponible en annexe de ce mémoire, au paragraphe 8.1.

Propriété :

1. Pour tout n pair ($n \geq 4$), un MGG à n sommets ne possède pas de sommet de degré 1.
2. Pour tout n impair ($n \geq 5$), si un MGG à n sommets pratiquant l'échange total en t unités de temps possède un sommet de degré 1, alors l'arête reliant ce sommet au reste du graphe sera nécessairement évaluée par les unités de temps 1 et t .

Preuve : Soit G un MGG à n sommets possédant un sommet A de degré 1. Soit AB l'arête reliant ce sommet au reste du graphe, que nous appellerons G_1 . Montrons tout d'abord que le nombre des valuations de AB est égal à deux.

- Supposons $|AB| \geq 3$, c'est-à-dire qu'on suppose que $AB = \{t_1, t_2 \dots t_p\}$ (avec $p \geq 3$ et les t_i ordonnés de façon croissante).
Alors, quelle que soit l'unité de temps considérée, A ne donnera pas plus d'information à B que celle qu'il lui a fournie au temps t_1 (le reste étant déjà connu par B , puisque c'est B lui-même qui aura fourni toute nouvelle information à A). Ce que l'on peut résumer comme ceci : " t_1 suffit pour la descente".
De la même manière, B ne donnera pas plus d'information à A que celle qu'il lui a fournie

à la dernière unité de temps : “ t_p suffit pour la remontée”.

Donc, si $|AB| \geq 3$, on peut aisément se ramener au cas $|AB| = 2$, en ne considérant que les valuations t_1 et t_p .

- Supposons maintenant que $|AB| = 1$, c’est-à-dire $AB = \{t_1\}$. Comme A et B ne s’échangent leurs informations qu’au temps t_1 , cela veut dire :

1. Qu’il y a diffusion dans G_1 en temps $(t_1 - 1)$, de par la “montée” des informations de G_1 vers A . La diffusion dans G_1 - graphe à $(n - 1)$ sommets - s’effectuant au mieux en $\lceil \log_2(n - 1) \rceil$, on obtient une première inégalité :

$$t_1 - 1 \geq \lceil \log_2(n - 1) \rceil \quad (1)$$

2. Qu’il y a diffusion dans G_1 en temps $(t - t_1)$, de par la “descente” des informations de B vers G_1 , d’où l’inégalité :

$$t - t_1 \geq \lceil \log_2(n - 1) \rceil \quad (2)$$

En additionnant (1) et (2), on obtient : $t - 1 \geq 2 \times \lceil \log_2(n - 1) \rceil$ (3). Considérons maintenant les cas pair et impair :

- Si n est pair, alors $t = \lceil \log_2(n) \rceil$, donc l’inégalité (3) devient :
 $\lceil \log_2(n) \rceil \geq 2 \times \lceil \log_2(n - 1) \rceil + 1$.
Or cette inégalité est fautive pour tout n pair supérieur ou égal à 4.
- Si n est impair, alors $t = \lceil \log_2(n) \rceil + 1$, et l’inégalité (3) devient :
 $\lceil \log_2(n) \rceil \geq 2 \times \lceil \log_2(n - 1) \rceil$.
De même, cette inégalité est fautive pour tout n impair supérieur ou égal à 5.

Donc, pour tout $n \geq 4$, l’arête AB sera évaluée par deux unités de temps et deux seulement.

Montrons maintenant la propriété en elle-même, en supposant $AB = \{t_1, t_2\}$ avec $t_1 < t_2$. De la même manière que précédemment, on en conclut :

1. Que G_1 diffuse en temps $(t_2 - 1)$, de par la remontée des informations G_1 vers A , d’où l’inégalité : $t_2 \geq \lceil \log_2(n - 1) \rceil + 1$ (4);
2. Que G_1 diffuse également en temps $(t - t_1)$, de par la descente des informations de A vers G_1 , d’où : $t_1 \leq t - \lceil \log_2(n - 1) \rceil$ (5).

- Si n est pair, deux cas se présentent :

- Si $n = 2^p$, on a vu que chaque sommet était de degré p , donc pour $n \geq 4$, il n’existe pas de sommet de degré 1;
- Si n n’est pas une puissance de 2, alors $t = \lceil \log_2(n) \rceil$ et $\lceil \log_2(n) \rceil = \lceil \log_2(n - 1) \rceil$. L’inégalité (5) nous donne alors : $t_1 \leq 0$, ce qui est impossible.

- Si n est impair, deux cas se présentent à nouveau :

- Si $n = 2^p + 1$, alors t , le temps d’échange total, vérifie : $t = \lceil \log_2(n) \rceil + 1 = p + 2$. De plus, $\lceil \log_2(n - 1) \rceil = p = \lceil \log_2(n) \rceil$. Les inégalités (4) et (5) nous donnent alors : $t_1 \leq 2$ et $t_2 \geq t - 1$. On a donc quatre combinaisons possibles quant aux valuations

de l'arête AB reliant le sommet de degré 1 au reste du graphe. Montrons que, parmi ces quatre combinaisons, seul le cas $AB = \{1, t\}$ est viable.

En effet, supposons $AB = \{2, t\}$, et construisons le MBT de racine A (le sommet de degré 1) correspondant (figure 3.1).

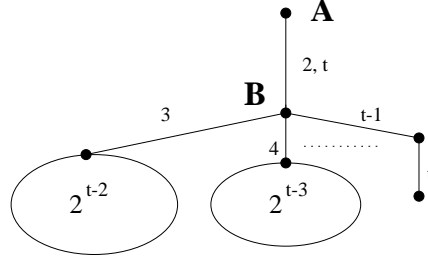


Figure 3.1: MBT de racine A

Appelons N le nombre de sommets de ce MBT, c'est-à-dire le nombre maximum de sommets que A peut atteindre par diffusion. Alors $N = 2 + \sum_{i=1}^{t-3} 2^i$, c'est-à-dire $N = 2^{t-2} = 2^p$. Or, on sait que $n = 2^p + 1$; donc A ne peut atteindre les n sommets : l'hypothèse $AB = \{2, t\}$ n'est pas viable.

De la même manière, on montre que si $AB = \{2, t-1\}$, alors le MBT de racine A sera à $2^p - 1$ sommets, et que si $AB = \{1, t-1\}$, alors le RBT de racine A sera à 2^p sommets.

La seule solution possible est donc le cas où $AB = \{1, t\}$.

- Si $n \neq 2^p + 1$, alors $\lceil \log_2(n) \rceil$ et $\lceil \log_2(n-1) \rceil$ ont la même valeur. Les inégalités (4) et (5) deviennent alors : $t_1 \leq 1$ et $t_2 \geq t$, ce qui prouve la propriété ci-dessus.

Corollaire : Dans un MGG_n ($n \geq 4$), deux sommets de degré 1 ne peuvent être reliés au même sommet.

Preuve : Si n est pair, il n'existe pas de sommet de degré 1 et la question ne se pose pas.

Si n est impair, soit A et B deux sommets de degré 1 reliés au même sommet C . Alors, la propriété précédente nous montre que nécessairement, les arêtes AC et BC sont toutes deux valuées, notamment, par l'unité de temps 1. Or AC et BC "partagent" le sommet C , et, en vertu de l'hypothèse d'un modèle 1-port, C ne peut communiquer à la fois avec A et avec B durant la même unité de temps.

La propriété du paragraphe suivant généralise ce résultat à tout isthme dans un MGG d'ordre n .

3.2 Les isthmes dans un MGG_n

Rappel : Dans un graphe G connexe, on appelle **isthme** toute arête qui, du fait de sa suppression, entraîne la séparation du graphe en deux composantes connexes, que l'on notera G_1 et G_2 .

Propriété :

1. Pour tout n pair ($n \geq 4$), tout MGG_n est sans isthme ;
2. Pour tout n impair ($n \geq 5$), les seuls isthmes pouvant exister dans un MGG_n sont les arêtes reliant un sommet de degré 1 au reste du graphe.

Preuve : Tout comme pour la propriété sur les sommets de degré 1, elle va se scinder en deux étapes. Démontrons tout d'abord que s'il existe un isthme dans un MGG_n , il est nécessairement valué par deux unités de temps et deux seulement.

- Supposons que l'on ait un isthme P_1P_2 valué par au moins trois unités de temps $t_1, t_2 \dots t_p$, celles-ci étant ordonnées de façon croissante.
Soit i le plus petit nombre tel que P_1 soit expert de G_1 au temps $t_i - 1$, et j le plus petit nombre tel que P_2 soit expert de G_2 au temps $t_j - 1$. Il est à noter que ces deux valeurs i et j existent, puisqu'il est nécessaire que P_1 et P_2 soient experts (de la totalité du graphe) avant la fin de l'échange total. On supposera, pour fixer les idées, que $t_i \leq t_j$.
Alors tout ce qu'il y a "avant" et "après" t_i est inutile sur l'arête P_1P_2 du point de vue de P_2 (et, partant, de G_2), car P_2 sera de toute façon expert de G_1 au temps t_i . De la même manière, et symétriquement, tout ce qu'il y a avant et après t_j est inutile sur l'arête P_1P_2 du point de vue de P_1 et de G_1 .
Donc les seules valuations nécessaires à l'isthme P_1P_2 pour effectuer l'échange total en temps voulu sont t_i et t_j .
- Supposons maintenant que l'isthme P_1P_2 ne soit valué que par une seule unité de temps t_1 dans un MGG effectuant l'échange total en temps t . Alors le même raisonnement que celui effectué sur les arbres pour démontrer la propriété du paragraphe 2.2.3, nous donne la même inégalité, c'est-à-dire :

$$t \geq 2 \times \lceil \log_2(n) \rceil - 1$$

Or cette égalité n'est valable que pour $n \leq 3$.

Donc, pour tout $n \geq 4$, tout isthme P_1P_2 dans un MGG_n sera valué par deux unités de temps et deux seulement, que nous nommerons t_1 et t_2 , en supposant $t_1 < t_2$. Supposons alors que $|V(G_2)| \geq n/2$, c'est-à-dire que G_2 contienne la moitié - ou plus - des sommets du MGG_n considéré.

On a alors l'inégalité suivante : $\lceil \log_2(|V(G_2)|) \rceil \geq \lceil \log_2(n/2) \rceil$, c'est-à-dire :

$$\lceil \log_2(|V(G_2)|) \rceil \geq \lceil \log_2(n) \rceil - 1.$$

Or, par le même raisonnement que celui utilisé dans la partie précédente concernant les sommets de degré 1, on peut en déduire deux inégalités :

$$1. t - t_1 \geq \lceil \log_2(|V(G_2)|) \rceil, \text{ et}$$

$$2. t_2 - 1 \geq \lceil \log_2(|V(G_2)|) \rceil.$$

Ce qui, en les combinant, nous donne :

$$1. t_1 \leq t + 1 - \lceil \log_2(n) \rceil, \text{ et}$$

$$2. t_2 \geq \lceil \log_2(n) \rceil.$$

Considérons maintenant les cas n pair et n impair de façon séparée :

- Si n est pair, alors les deux dernières inégalités deviennent $t_1 \leq 1$ et $t_2 \geq t$. En supposant toujours que G_2 contienne la moitié ou plus des sommets du graphe (c'est-à-dire au moins 2, partant de l'hypothèse que $n \geq 4$), P_1 ne peut être expert de G_2 au temps 1. Il le sera donc nécessairement au temps t , mais n'aura alors plus de temps pour diffuser cette information vers G_1 . La seule solution viable réside dans le fait que G_1 se réduise à P_1 , c'est-à-dire que P_1 soit de degré 1.

Or, la propriété précédente nous dit que, sous ces hypothèses, et pour n pair, il n'existe pas de sommet de degré 1 dans un MGG_n .

- Si n est impair, les deux inégalités deviennent : $t_1 \leq 2$ et $t_2 \geq t - 1$, ce qui donne quatre combinaisons possibles. De la même manière que dans le cas où n est pair, et en considérant que G_2 possède au moins 3 sommets (puisque $n \geq 5$), on montre qu'une seule des quatre combinaisons est viable. Il s'agit du cas où $t_1 = 1$ et $t_2 = t$, et encore n'est-ce valable que dans le cas où G_1 se réduit à P_1 . Ce qui démontre la propriété.

La propriété précédente, concernant les isthmes, en induit automatiquement le corollaire ci-dessous.

Corollaire : Dans un MGG d'ordre n ($n \geq 4$), il n'existe pas d'arête de type (1,2).

Preuve : En effet, soit AB l'arête de type (1,2) et soit BC la deuxième arête issue de B dans un graphe G qui soit MGG d'ordre n . Alors BC est un isthme pour G . Or, BC n'est pas une arête de type (1, p) pour tout $n \neq 3$, d'où la propriété.

3.3 Arêtes incidentes à un sommet de degré 2 dans un MGG_n

Propriété :

1. Pour tout n pair ($n \geq 6$), s'il existe un sommet A de degré 2 dont les arêtes incidentes sont AB et AC , alors 1 et $\lceil \log_2(n) \rceil$ valent AB ou AC .
2. Pour tout n impair ($n \geq 9$), si $3 \times 2^{p-2} + 1 \leq n \leq 2^p - 1$ et s'il existe un sommet A de degré 2 dont les arêtes incidentes sont AB et AC , alors 1 et $p + 1$ valent AB ou AC .

Remarque : La dénomination "1 et t valent AB ou AC " sous-entend que ces deux valeurs sont nécessairement présentes sur les arêtes issues de A , mais ne veut pas dire que nécessairement $1, t \in AB$ ou $1, t \in AC$. On peut très bien avoir $1 \in AB$ et $t \in AC$, ou l'inverse.

Preuve : Cette propriété se démontre en utilisant les MBT et RBT de racine A , et en comptant le nombre de sommets de chacun de ceux-ci. Tout d'abord, un lemme en deux parties est nécessaire à la preuve de la propriété.

Lemme : Considérons, dans un MGG à n sommets, un sommet A de degré 2, dont les arêtes incidentes sont AB et AC . Désignons par t le temps d'échange total dans ce graphe. Alors :

- Si $1 \notin AB$ et $1 \notin AC$, alors le MBT de racine A possède $3 \times 2^{t-3} + 1$ sommets ;
- Si $t \notin AB$ et $t \notin AC$, alors le RBT de racine A possède $3 \times 2^{t-3} + 1$ sommets.

Preuve du lemme : construisons le MBT de racine A en respectant les hypothèses du lemme (figure 3.2).

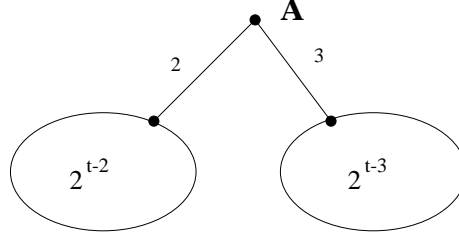


Figure 3.2: MBT de racine A

Alors, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 2.3.6, cet arbre possède $2^{t-2} + 2^{t-3} + 1$ sommets, c'est-à-dire $3 \times 2^{t-3} + 1$ sommets.

D'une manière symétrique, si on construit le RBT de racine A , et ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 2.3.6, il contiendra également $3 \times 2^{t-3} + 1$ sommets. Par la suite, nous désignerons par N cette valeur.

Distinguons maintenant les cas n pair et n impair :

- Pour tout n pair, $2^{p-1} + 2 \leq n \leq 2^p$, le temps d'échange total vaut $t = \lceil \log_2(n) \rceil$, c'est-à-dire $t = p$. Donc, si on suppose $1 \notin AB$ et $1 \notin AC$, alors, d'après le lemme, $N = 3 \times 2^{t-3} + 1$, c'est-à-dire $N = 3 \times 2^{p-3} + 1$. Ce qui nous donne les deux formules suivantes :
 $n \geq 2^{p-1} + 2$ et $N = 3 \times 2^{p-3} + 1$.

La combinaison de ces deux formules nous donne $n > N$ pour tout n pair supérieur ou égal à 6. De la même manière, et en raisonnant sur les RBT, si on suppose $t \notin AB$ et $t \notin AC$, alors on aboutit à la même conclusion, c'est-à-dire $n > N$ pour tout $n \geq 6$.

Donc, pour n pair, un sommet de degré 2 dont les arêtes incidentes ne sont pas valuées par 1 et t ne pourra diffuser à tous les autres sommets du graphe.

- Pour tout n impair, $2^{p-1} + 2^{p-2} + 1 \leq n \leq 2^p - 1$, le temps d'échange total sera alors $t = \lceil \log_2(n) \rceil + 1$, c'est-à-dire $t = p + 1$. Si on suppose donc $1 \notin AB$ et $1 \notin AC$, alors le lemme ci-dessus nous dit que $N = 3 \times 2^{t-3} + 1$, c'est-à-dire $N = 3 \times 2^{p-2} + 1$. Ce qui nous donne : $n \geq 2^{p-1} + 1$ et $N = 3 \times 2^{p-2} + 1$.

Or, nous savons que si $n > N$, l'hypothèse de départ (c'est-à-dire $1 \notin AB$) est fautive. Donc, pour tout n tel que $n \geq 3 \times 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 2} + 3$, l'unité de temps 1 value nécessairement l'arête AB ou l'arête AC . De manière symétrique, et en raisonnant sur les RBT, on montre que pour tout n impair tel que $n \geq 3 \times 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 2} + 3$, l'unité de temps t value nécessairement l'arête AB ou l'arête AC .

Reste une valeur de n pour laquelle $N \geq n$: $n = 3 \times 2^{p-2} + 1$. En effet, pour cette valeur, si on construit le MBT de racine A en supposant $1 \notin AB$ et $1 \notin AC$, cet arbre aura n sommets ou plus. Cependant, toute autre valuation que $2 \in AB$ et $3 \in AC$ (ou son symétrique) donne un MBT à strictement moins de n sommets. Considérons alors le RBT de racine A , et voyons quelles valuations donner à AB et AC pour qu'il soit également à n sommets ou plus.

Pour cela, supposons que AB soit valuée par $(t - t_i)$ et que AC soit valuée par $(t - t_j)$ tels

que $t_i \neq t_j$. En tenant compte des valuations 2 et 3 nécessaires à AB et AC pour obtenir un MBT à n sommets ou plus, comptons le nombre de sommets du RBT. Il vaut alors $N = 3 \times 2^{p-2} + 1 - (2^{t_i} + 2^{t_j})$.

Si $n = 3 \times 2^{p-2} + 1$, alors $n > N$ pour tout couple (t_i, t_j) tel que $2^{t_i} + 2^{t_j} > 0$, ce qui est toujours vrai pour tout couple (t_i, t_j) d'entiers positifs. Donc 1 value nécessairement AB ou AC .

En effectuant le raisonnement de manière symétrique, et en inversant le rôle des MBT et des RBT, on montre que t value aussi nécessairement AB ou AC .

3.4 Arêtes de type (1,3)

Sur les bases de la propriété précédente, on peut alors aborder le problème des arêtes (1,3).

Propriété : Pour tout n impair ($n \geq 9$), si $3 \times 2^{p-2} + 1 \leq n \leq 2^p - 1$ alors il n'existe pas d'arête de type (1,3) dans un MGG_n .

Preuve : Elle découle directement de la propriété précédente concernant les sommets de degré 2. Supposons en effet que AB soit une arête (1,3) dans un MGG_n . On a vu au paragraphe 3.1 que nécessairement $AB = \{1, t\}$, où t est le temps d'échange total dans le graphe.

Donc, au "mieux" pour le MBT de racine A , les arêtes BC et BD sont valuées par les unités de temps 2 et 3. Si on occulte le sommet A , cela nous ramène aux sommets de degré 2 n'ayant l'unité de temps 1 sur aucune de ses deux arêtes incidentes, c'est-à-dire à la propriété précédente. La seule différence réside dans le fait que N est augmenté d'une unité, ceci étant dû à la présence du sommet A .

Néanmoins, le résultat reste valable, car si on augmente N d'une unité, il devient alors pair, et reste toujours strictement inférieur à n (qui est impair), dans le cas où $n \geq 3 \times 2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 2} + 1$.

Exemple : Dans le cas où $t = 6$, pour tout n impair, $25 \leq n \leq 31$, il n'y a pas d'arête (1,3) dans les MGG_n .

3.5 Adjacence de sommets de degré 2 dans un MGG_n

3.5.1 Adjacence de sommets de degré 2 dans un MGG_{2m}

Propriété : Pour tout n pair ($n \geq 8$), deux sommets de degré 2 ne peuvent être adjacents dans un MGG_n .

Preuve : Supposons que l'on ait deux sommets de degré 2 adjacents dans un MGG_n , où n est pair ($n \geq 8$), ainsi que le montre la figure 3.3.

Supposons alors $2^{k-1} + 2 \leq n \leq 2^k$, c'est-à-dire que k est le temps d'échange total du graphe. Deux cas se présentent alors, sachant que 1, notamment, value nécessairement une des arêtes issues de A (respectivement de B) :

1. Si $1 \in AB$, alors supposons que p value AA_1 et que q value BB_1 , ces deux valeurs étant les plus petites unités de temps valant respectivement AA_1 et BB_1 . Alors, le MBT de racine A (respectivement B) conduit à $N = 2^{k-p} + 2^{k-q} + 2$ sommets. Or comme p et q

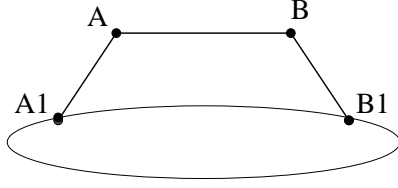


Figure 3.3: Deux sommets de degré 2 adjacents

sont nécessairement supérieurs ou égaux à 2, on a l'inégalité suivante : $N \leq 2^{k-1} + 2$.

Donc, pour tout $n \neq 2^{k-1} + 2$, cette hypothèse ne convient pas. De plus, si $n = 2^{k-1} + 2$, la seule solution possible concernant les contraintes sur le MBT est $p = q = 2$.

Dans ce cas, si $k \in AB$, par un raisonnement totalement analogue sur les RBT, on montre que, nécessairement, $(k-1)$ value les arêtes AA_1 et BB_1 . En construisant alors à nouveau le MBT de racine A , on voit qu'il est amputé de 4 sommets, c'est-à-dire $N = 2^{k-1} - 2$. Cette valeur étant strictement inférieure à tout n , on en conclut que cette hypothèse ne convient pas.

Si enfin $k \notin AB$, on sait que, nécessairement $k \in AA_1$ et $k \in BB_1$, ce qui ampute le nombre de sommets du MBT de racine A , par exemple, de 2 unités. Cette hypothèse n'est donc également pas valable.

2. Si $1 \in AA_1$ et $1 \in BB_1$, alors, de la même manière, on suppose $p \in AA_1$ et $q \in BB_1$, où p (respectivement q) est la plus petite unité de temps différente de 1 valant AA_1 (respectivement BB_1), en supposant $(p-1) \in AB$. Les deux MBT de racine A et de racine B donnent alors deux valeurs différentes de N , qui sont respectivement :

$$N = 2^{k-1} + (2^{k-p} - 2^{k-q}) + 2, \text{ et}$$

$$N = 2^{k-1} + (2^{k-q} - 2^{k-p}) + 2.$$

Or, ces deux valeurs ne peuvent atteindre au mieux que la valeur $2^{k-1} + 2$, en supposant $p = q$.

Si on suppose alors $k \in AB$, en reprenant le raisonnement du cas précédent sur les RBT, on voit qu'il est nécessaire que $p = k - 1$. Mais le RBT de racine A est alors à $N = 2^{k-1}$ sommets, ce qui n'est pas suffisant.

Enfin, si $k \notin AB$ (c'est-à-dire $k \in AA_1$ et $k \in BB_1$), de la même manière le MBT de racine A sera à $N = 2^{k-1}$ sommets.

Quelle que soit l'hypothèse considérée sur l'emplacement des valuations 1 et k , on voit que le nombre de sommets des RBT et/ou MBT de racine A et B n'atteignent jamais n . L'adjacence de deux sommets de degré 2 dans un MGG_n où n est pair est donc impossible.

3.5.2 Adjacence de sommets de degré 2 dans un MGG_{2m+1}

Nombre maximum de sommets de degré 2 adjacents

Propriété : Pour tout n impair, si $3 \times 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^k - 1$, on a au plus deux sommets de degré 2 adjacents dans un MGG_n .

Preuve : Elle découle des propriétés concernant les valuations des arêtes issues des sommets de degré 2 pour de telles valeurs de n . Supposons en effet avoir un MGG_n dans lequel on a trois sommets de degré 2 formant une chaîne, et considérons le MBT de racine A , A étant le sommet de degré 2 adjacent aux deux autres. Au mieux, on obtient l'arbre de la figure 3.4.

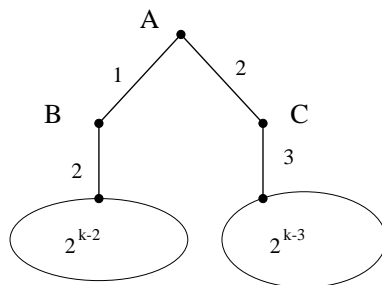


Figure 3.4: Trois sommets de degré 2 adjacents

Or, cet arbre est à $3 \times 2^{k-2} + 2$ sommets. Donc si $n \geq 3 \times 2^{k-2} + 3$, ceci est impossible. Si n vaut $3 \times 2^{k-2} + 1$, les valuations $1 \in AB$ et $2 \in AC$ (ou leur symétrique) restent toutefois nécessaires pour obtenir un MBT à n sommets ou plus. Tenant compte de ces valuations, construisons alors le RBT de racine A . Sachant que pour cette valeur de n , 1 et $(k+1)$ valent nécessairement les arêtes adjacentes à tout sommet de degré 2, on a deux schémas possibles, qui sont ceux indiqués à la figure 3.5.

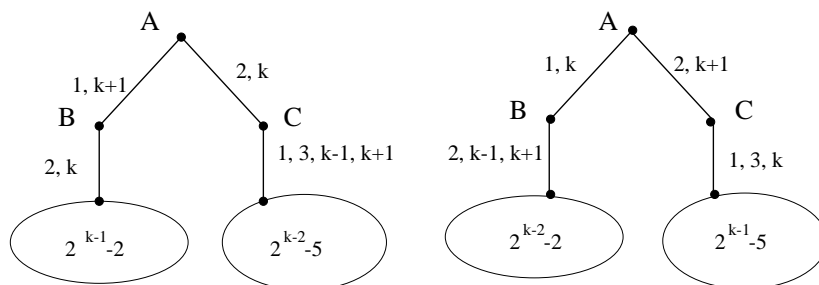


Figure 3.5: Trois sommets de degré 2 adjacents

Quel que soit l'arbre considéré, le RBT de sommet A sera à $N = 3 \times 2^{k-2} - 4$ sommets, donc N sera strictement inférieur à n , ce qui est impossible.

Une chaîne de trois sommets - ou plus - de degré 2 sans corde n'existe donc pas, d'où la propriété.

Schémas possibles pour l'adjacence de 2 sommets de degré 2

Propriété : Pour tout n impair tel que $3 \times 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^k - 1$ ($k \geq 5$), si deux sommets de degré 2 sont adjacents dans un MGG_n , alors on a un des 4 schémas présentés à la figure 3.6.

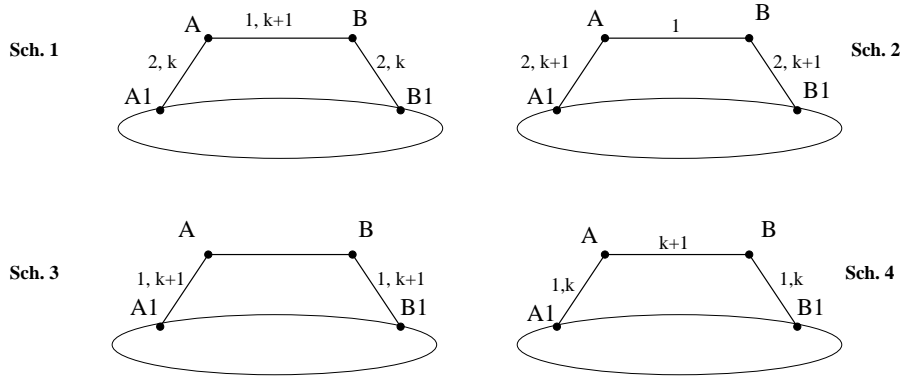


Figure 3.6: Deux sommets de degré 2 adjacents

Remarque : La totalité des valuations de l'arête AB ne sont pas a priori connues. De la même manière, les valuations des arêtes AA_1 et BB_1 sur les différents schémas ne sont pas exclusives, c'est-à-dire que d'autres unités de temps peuvent éventuellement s'ajouter. Cependant, seules les valuations indiquées sur les différents schémas nous seront nécessaires.

Preuve : Sachant que, lorsqu'on a un sommet de degré 2, les unités de temps 1 et $(k + 1)$ valent nécessairement les arêtes issues de celui-ci, quatre cas se présentent, que nous allons détailler :

1. Supposons avoir le schéma de la figure 3.7.

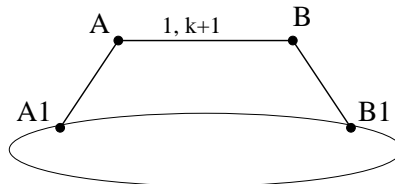


Figure 3.7: Deux sommets de degré 2 adjacents - 1er cas

Si on suppose AA_1 et BB_1 non valuées par l'unité de temps 2, alors le MBT de racine A , comme le MBT de racine B , est à $N = 2^{k-1} + 2$ sommets au mieux, et $n > N$, ce qui est impossible.

Si $2 \in AA_1$ et $3 \in BB_1$, alors le MBT est à $N = 3 \times 2^{k-2} + 2$ sommets, ce qui est a priori possible. Or, par un raisonnement symétrique, on montre que nécessairement un des deux couples suivants : $(k - 1, k)$ ou (k, k) , value le couple d'arêtes (AA_1, BB_1) . En tenant compte de ces valuations, si l'on dénombre à nouveau les sommets du MBT, on voit qu'il est à $N = 3 \times 2^{k-2}$ sommets au mieux, et $n > N$, ce qui n'est pas possible.

Le seul schéma viable est donc le schéma 1 de la propriété.

2. Supposons avoir le schéma de la figure 3.8.

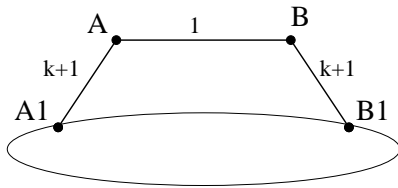


Figure 3.8: Deux sommets de degré 2 adjacents - 2ème cas

Si on suppose $2 \in AA_1$ et $3 \in BB_1$, le MBT de racine A , par exemple, est à $N = 3 \times 2^{k-2}$ sommets, d'où $n > N$. Donc on ne peut avoir que le schéma 2 de la propriété.

3. Supposons avoir le schéma de la figure 3.9.

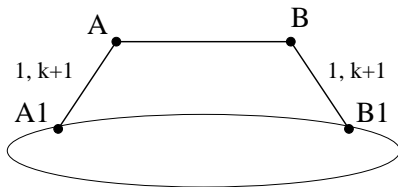


Figure 3.9: Deux sommets de degré 2 adjacents - 3ème cas

Ce schéma n'est autre que le schéma 3 de la propriété.

4. Supposons enfin avoir le schéma de la figure 3.10.

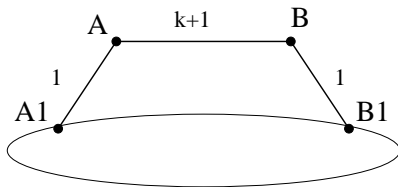


Figure 3.10: Deux sommets de degré 2 adjacents - 4ème cas

Par un raisonnement en tout point symétrique à celui du deuxième cas, et en inversant les rôles respectifs des MBT et des RBT, on montre que le seul schéma qui convienne est le quatrième schéma de la propriété.

Remarque : Cette propriété trouvera toute son importance dans les démonstrations concernant certaines bornes inférieures pour $G(n)$, notamment au paragraphe 4.2.3.

Chapitre 4

Bornes pour $G(n)$

Après avoir vu quelques propriétés concernant les degrés des sommets et les valuations des arêtes d'un MGG_n - propriétés qui serviront à encadrer, voire déterminer les valeurs de $G(n)$ pour des valeurs de n précises -, il convient de s'intéresser à un encadrement plus général des valeurs de $G(n)$.

Remarque : peu de propriétés seront données pour des MGG_n dans le cas où n est pair. Cependant, les valeurs de $G(n)$ sont d'ores et déjà connues pour un nombre important de valeurs de n paires ($n = 2^p$, $n = 2^p - 2$, $n = 2^p - 4$ [13]).

4.1 Construction de graphes d'échange total à partir de MGG existants

Ces constructions vont nous permettre d'obtenir une borne supérieure pour $G(n)$.

4.1.1 Propriété immédiate

Propriété : Pour tout n , $G(n) \leq \frac{n \times t_n}{2}$, où t_n est le temps d'échange total du MGG_n correspondant.

Preuve : Si t_n est le temps d'échange total, alors chacun des sommets du MGG correspondant sera de degré au plus t_n , puisqu'il est nécessaire que chaque arête soit évaluée par une unité de temps au moins.

Par conséquent, un graphe d'échange total sera au pire t_n -régulier - c'est-à-dire que chacun de ses sommets sera de degré t_n -, et le nombre de ses arêtes vaudra alors $\frac{n \times t_n}{2}$, d'où la propriété.

4.1.2 Composition d'un MGG_n par un MGG_n

Définitions :

- En supposant avoir deux graphes d'ordre n , G_1 et G_2 , on appellera **composition de deux graphes G_1 et G_2** tout graphe G d'ordre $2 \times n$ construit en effectuant n'importe quel couplage parfait entre G_1 et G_2 .
- On appelle **autocomposition** d'un graphe G la composition de G par lui-même. Par exemple, le produit par K_2 d'un graphe G est une autocomposition de G .

Propriété : Pour tout n pair, $G(2 \times n) \leq 2 \times G(n) + n$.

Preuve : En effet, supposons avoir un MGG_n pratiquant l'échange total en temps t_n . Alors, si on appelle t_{2n} le temps d'échange total dans tout MGG_{2n} , on a : $t_{2n} = t_n + 1$. En utilisant une autocomposition quelconque d'un MGG_n et en suivant le schéma d'échange total décrit ci-dessous, on obtient un graphe d'échange total à $2 \times n$ sommets tel qu'il est présenté à la figure 4.1.

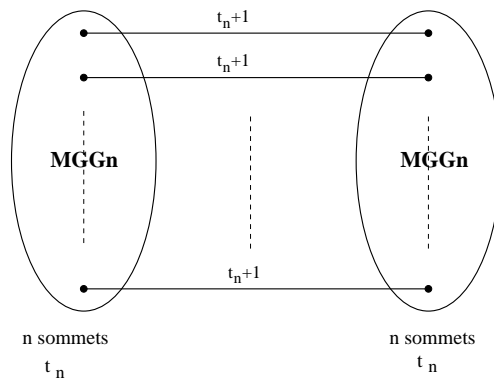


Figure 4.1: Un graphe d'échange total à $2 \times n$ sommets

- Chacun des deux MGG_n pratique l'échange total séparément et simultanément pendant les t_n premières unités de temps;
- Chacune des arêtes reliant un MGG_n à l'autre est évaluée par le temps $t_n + 1$.

En effet, chacun des sommets de chacun des deux MGG_n sera expert de "son" MGG_n en temps t_n . La composition du MGG_n par lui-même et l'échange au temps $t_n + 1$ le long des arêtes reliant un MGG_n à l'autre assurent que le graphe est un graphe d'échange total. Comme ce graphe est à $2 \times G(n) + n$ arêtes, on obtient la propriété ci-dessus.

Exemple : Pour $n = 6$, on a alors $G(12) \leq 2 \times G(6) + 6$, c'est-à-dire $G(12) \leq 18$. Or, Labahn [13] a démontré que $G(12) = 18$, donc le graphe de la figure 4.2 est MGG, et un système de valuations possible est indiqué pour l'échange total.

Remarque : cette propriété induit directement le corollaire suivant.

Corollaire : Si un graphe G est MGG d'ordre $2^k - 2$ ($k \geq 3$), alors toute autocomposition de G est MGG d'ordre $2^{k+1} - 4$.

Preuve : En effet, on sait d'après Labahn [13] que $G(2^{k+1} - 4) = k \times (2^k - 2)$ (1).

Or, si G est MGG d'ordre $n = 2^k - 2$, on sait également d'après Labahn [13] que $G(n) = (k - 1) \times (2^{k-1} - 1)$. Donc, toute autocomposition de G aura un nombre d'arêtes égal à $2 \times G(n) + n$, c'est-à-dire $N = k \times (2^k - 2)$.

On remarque alors, d'après l'égalité (1), que $N = G(2 \times n)$. De plus, la propriété précédente

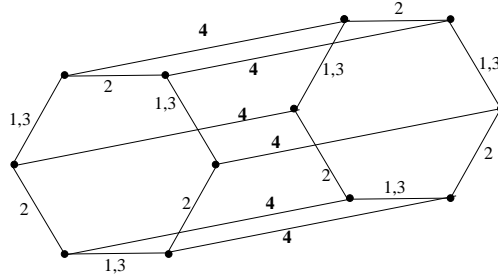


Figure 4.2: Un MGG à 12 sommets

nous montre qu'il est possible de pratiquer l'échange total en temps minimum dans un tel graphe à $2 \times n$ sommets, donc ce graphe est MGG d'ordre $2 \times n$.

Exemple : Toute composition d'un MGG_6 par un MGG_6 donne un MGG_{12} , comme cela a été vu dans la figure 4.2. De la même manière, toute composition d'un MGG_{14} par un MGG_{14} donne un MGG_{28} . Labahn ayant démontré que $G(14) = 21$ et qu'il n'existe qu'un MGG_{14} [13], on connaît d'ores et déjà autant de MGG_{28} non isomorphes qu'il y a d'autocompositions du MGG_{14} non isomorphes.

4.1.3 Graphes d'échange total à $2n + 1$ sommets

La borne supérieure obtenue grâce à la composition de deux MGG_n n'est valable que pour des graphes ayant un nombre pair de sommets. Partant du principe de la composition de deux graphes, nous allons donc également nous intéresser aux graphes à $2n + 1$ sommets.

Propriété : Pour tout n où n n'est pas une puissance de 2, on a :

$$G(2 \times n + 1) \leq G(n) + G(n + 1) + n.$$

Preuve : Elle se scinde en deux parties, selon que n est pair ou non. Nous allons détailler la méthode dans le cas où n est pair et, partant de cette méthode, l'appliquer d'une manière analogue dans le cas où n est impair.

- Dans le cas où n est pair, supposons que l'on ait un $MGG_n : G_1$ et un $MGG_{n+1} : G_2$. Le nombre de sommets n n'étant pas une puissance de 2, on a les égalités suivantes : $t_{n+1} = t_n + 1$ et $t_{2n+1} = t_{n+1} + 1 = t_n + 2$, où t_p désignera, tout au long de cette démonstration, le temps d'échange total dans un MGG_p .

Or, dans le graphe G_2 , qui possède un nombre impair de sommets, on sait qu'il existe un sommet V ne participant pas à la dernière étape (c'est-à-dire dont aucune des arêtes incidentes ne soit évaluée par $t_n + 1$). Donc, au temps t_n , V sera expert de G_2 . Or, il en va de même pour chacun des sommets de G_1 . On relie donc un des sommets de G_1 , U , au sommet V , et on value l'arête UV par l'unité de temps $t_n + 1$. A la fin de ce temps, U et V seront donc experts du graphe $G = G_1 \cup G_2$.

Or, le graphe G_2 étant connexe (puisque MGG), on sait qu'il existe au moins un sommet W de G_2 tel que l'arête VW existe. De plus, G_2 pratiquant l'échange total en temps $t_n + 1$,

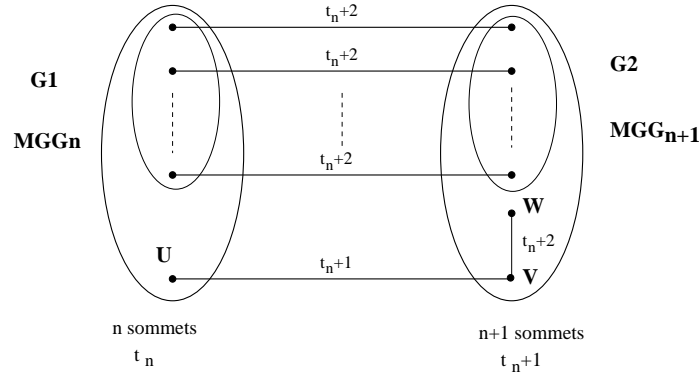


Figure 4.3: Un graphe d'échange total à $2 \times n + 1$ sommets

on peut s'autoriser à valuer cette arête par le temps $t_n + 2$. Ainsi, W sera également expert de G au temps $t_n + 2$.

Restent alors $(n - 1)$ sommets respectivement dans G_1 et G_2 experts de leur "propre" graphe au temps $t_n + 1$. Si on effectue une composition entre ces deux graphes à $(n - 1)$ sommets et que l'on value chacune de ces arêtes par l'unité de temps $t_n + 2$, on obtient alors un graphe d'échange total à $G(n) + G(n + 1) + n$ sommets, ce qui démontre la propriété ci-dessus.

Exemple : Pour $n = 6$, alors $2 \times n + 1 = 13$, et on a : $G(13) \leq G(6) + G(7) + 6$, c'est-à-dire $G(13) \leq 19$.

Remarque : Cette borne supérieure est loin d'être satisfaisante, puisqu'on voit, sur le schéma d'échange total, que l'unité de temps $t_n + 1$ n'est utilisée que sur une seule arête mettant à contribution un ou des sommets du graphe G_1 (l'arête UV). On peut donc considérer que l'"utilisation" de l'unité de temps $t_n + 1$ n'est pas optimale.

- Dans le cas où n est impair, supposons que l'on ait un $MGG_n(G_1)$ et un $MGG_{n+1}(G_2)$. Le nombre de sommets n étant impair, on a les égalités suivantes : $t_{n+1} = t_n - 1$ et $t_{2n+1} = t_{n+1} + 2 = t_n + 1$.

De la même manière que pour la démonstration précédente, on constate qu'il existe un sommet V de G_1 ne participant pas à l'échange au temps t_n . De plus, dans G_2 , l'échange total se termine en $t_n - 1$. Donc on peut relier V à n'importe quel sommet U de G_2 , et valuer l'arête UV par le temps t_n . U et V , qui étaient experts de leur graphe respectif en temps $t_n - 1$, seront alors experts de $G = G_1 \cup G_2$ en temps t_n .

Or, G_2 étant connexe, on sait qu'il existe au moins un sommet W de G_2 tel que l'arête UW existe. De plus, G_2 pratiquant l'échange total en temps $t_n - 1$, on peut valuer cette arête par le temps $t_n + 1$, et W sera lui-même expert de G en temps $t_n + 1$.

Si on effectue alors une composition de $G_1 - \{V\}$ par $G_2 - \{U, W\}$ en valuant chacune des arêtes reliant l'un à l'autre par l'unité de temps $t_n + 1$, le graphe G devient alors graphe d'échange total. Or ce graphe est à $G(n) + G(n + 1) + n$ sommets, d'où la propriété.

Exemple : Dans le cas où $n = 5$, $G(11) \leq 16$.

Remarque : De même que pour la propriété précédente, on s'aperçoit ici que l'unité de temps t_n ne value qu'une seule arête mettant à contribution un ou des sommets de G_2 , ce qui permet de penser que cette borne pourrait être plus fine.

4.1.4 Arêtes de type $(1, p)$ dans un MGG_n

Cette partie sera axée sur la présence, dans un graphe d'échange total, de sommets de degré 1, et donc d'arêtes de type $(1, p)$. Cela implique donc que ces graphes aient un nombre impair de sommets, suivant la propriété du paragraphe 3.1 qui nous dit que seuls les MGG avec un nombre impair de sommets peuvent avoir des sommets de degré 1.

Trois constructions de graphes d'échange total vont être présentées; elles présentent toutes trois la particularité d'ajouter ou de retirer des arêtes de type $(1, p)$ à un MGG existant.

Hypercube et arêtes $(1, p)$

Propriété : Pour tout n impair, $2^p + 1 \leq n \leq 2^{p+1} - 1$, alors $G(n) \leq n + 2^{p-1} \times (p - 2)$.

Preuve : il suffit de démontrer que l'hypercube Q_p , auquel on "ajoute" $(n - 2^p)$ arêtes de type $(1, (p + 1))$, est un graphe d'échange total à n sommets.

En effet, le temps d'échange total dans Q_p est p . De plus, n étant impair, le temps d'échange total dans un graphe à n sommets sera égal à $p + 2$. En valuant alors les arêtes de type $(1, (p + 1))$ par les unités de temps 1 et $(p + 2)$, et en faisant l'échange total dans Q_p entre les temps 2 et $p + 1$, on obtient bien un schéma d'échange total permettant au graphe de pratiquer celui-ci en $(p + 2)$ unités de temps.

Le nombre de sommets de ce graphe est alors de $(p \times 2^{p-1}) + (n - 2^p)$, d'où la propriété.

Exemples :

1. Dans le cas où $n = 13$, le graphe G_1 est graphe d'échange total, donc $G(13) \leq 17$, ce qui améliore sensiblement la borne supérieure par rapport à celle déterminée au paragraphe 4.1.3;
2. Dans le cas où $n = 15$, le graphe G_2 est graphe d'échange total lui aussi, donc $G(15) \leq 19$ (cf. figure 4.4).

MGG_n et arêtes $(1, p)$

Propriété : Pour tout n pair n'étant pas une puissance de 2 ($2^{p-1} + 2 \leq n \leq 2^p - 2$), et pour tout k impair tel que $2^p - n < k < n$, alors $G(n + k) \leq G(n) + k$.

Remarque : cette propriété est la généralisation de la propriété précédente à tout MGG d'ordre pair.

Preuve : Le temps d'échange total dans un MGG_n sera égal à p , tandis que celui d'un MGG_{n+k} sera égal à $p + 2$, puisque $n + k > 2^p$ et que $(n + k)$ est impair.

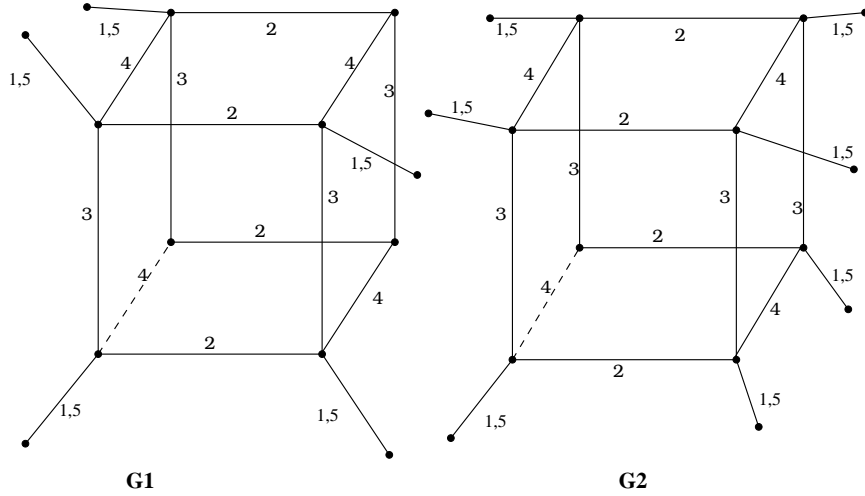


Figure 4.4: Deux graphes d'échange total à 13 et 15 sommets

Il reste alors à démontrer que le MGG d'ordre n auquel on "ajoute" k arêtes de type $(1, q)$ peut pratiquer l'échange total en temps $(p + 2)$.

On peut tout d'abord constater qu'il est possible de rajouter k arêtes de type $(1, q)$ au MGG d'ordre n , puisque l'on sait, par hypothèse, que $k < n$.

De la même manière que pour la démonstration de la propriété précédente, on remarque qu'en valuant les arêtes de type $(1, q)$ par les unités de temps 1 et $(p + 2)$, et qu'en pratiquant l'échange total dans le MGG_n entre les unités de temps 2 et $(p + 1)$, alors on obtient bien un graphe d'échange total à $(n + k)$ sommets. De plus, le nombre d'arêtes de ce graphe est égal à $G(n) + k$, d'où la propriété.

Exemple : Pour $n = 6$ et $k = 3$, on sait alors que $G(9) \leq G(6) + 3$, c'est-à-dire que $G(9) \leq 9$. Or, on sait que $G(9) \geq 9$, d'après la propriété de Labahn sur les arbres du paragraphe 2.2.3. Or, le cycle de longueur 6, C_6 , est MGG_6 . Donc le graphe que l'on peut appeler " $C_6 + 3$ arêtes $(1,3)$ " est MGG_9 .

Suppression d'arêtes $(1, p)$

Il s'agit ici de construire un MGG d'ordre $(n - 2)$ à partir d'un MGG d'ordre n , en supposant que ce dernier possède au moins deux sommets de degré 1.

Propriété : Si G est MGG d'ordre n ($2^p + 3 \leq n \leq 2^{p+1} - 1$), et si G possède au moins deux sommets de degré 1, alors $G(n - 2) \leq G(n) - 2$.

Remarque : Puisqu'on suppose avoir des sommets de degré 1 dans G , cela implique que n soit impair, et par conséquent, que $(n - 2)$ le soit également.

Preuve : Puisque $2^p + 3 \leq n \leq 2^{p+1} - 1$, on en déduit que $t_{n-2} = t_n$. Alors la suppression des deux sommets de degré 2 donne un graphe à $(n - 2)$ sommets et $G(n) - 2$ arêtes qui

est graphe d'échange total.

Remarque : On peut encore étendre cette propriété en supposant que G ait $2q$ sommets de degré 1. Alors, si t_n et t_{n-2q} sont égaux - c'est-à-dire si $2^p + 2q + 1 \leq n \leq 2^{p+1} - 1$ -, on a : $G(n - 2q) \leq G(n) - 2q$.

4.2 Bornes inférieures pour $G(n)$

4.2.1 Propriété immédiate

Propriété : Pour tout $n \geq 4$, $G(n) \geq n$.

Preuve : Tout MGG d'ordre n devant être connexe, on sait déjà que $G(n) \geq n - 1$.

De plus, Labahn [14] a démontré que le temps d'échange total dans un arbre T_n , vérifiait l'inégalité suivante :

$$t_n \geq 2 \times \lceil \log_2(n) \rceil - 1$$

Or, on vérifie aisément que pour tout $n \geq 4$:

- $t_n > \lceil \log_2(n) \rceil$ pour n pair et que
- $t_n > \lceil \log_2(n) \rceil + 1$ pour n impair.

Donc, pour tout $n \geq 4$, l'échange total ne peut se faire dans un arbre, ce qui exclut l'hypothèse $G(n) = n - 1$, d'où la propriété.

4.2.2 Bornes inférieures pour $G(2m)$

Il s'agit de déterminer une borne inférieure pour $G(n)$ dans le cas où n est pair. Deux résultats apparaissent alors : l'un concerne le cas où $2^{k-1} + 2 \leq n \leq 3 \times 2^{k-2} - 2$, l'autre le cas où $3 \times 2^{k-2} \leq n \leq 2^k$.

Cas où $2^{k-1} + 2 \leq n \leq 3 \times 2^{k-2} - 2$

Propriété : Pour tout n pair tel que $2^{k-1} + 2 \leq n \leq 3 \times 2^{k-2} - 2$ (avec $k \geq 4$), alors :

- $G(n) \geq n + \lfloor n/4 \rfloor + 1$ pour tout $n \neq 4 \times p$;
- $G(n) \geq \frac{5 \times n}{4}$ pour tout $n = 4 \times p$.

Remarque : cette propriété reste également vraie si $3 \times 2^{k-2} \leq n \leq 2^k$, mais une propriété plus forte sera énoncée au paragraphe suivant concernant ces valeurs de n .

Preuve : Pour tout n pair ($n \geq 8$), on sait :

- qu'un sommet de degré 2 possède nécessairement 1 et t_n sur les arêtes qui lui sont incidentes ;
- qu'un sommet de degré 2 est nécessairement adjacent à deux sommets de degré supérieur ou égal à trois.

Supposons avoir un sommet A de degré 3 ou plus dans un MGG d'ordre n , où n vérifie les hypothèses de la propriété. A combien de sommets de degré 2 le sommet A peut-il être adjacent ? Deux cas se présentent alors (cf. figure 4.5) :

1. Une des arêtes issues de A est valuée à la fois par les unités de temps 1 et t_n . Alors le sommet A ne “contribue directement” qu'à un seul sommet A_1 de degré 2, c'est-à-dire que A_1 est le seul sommet de degré 2 adjacent à A tel que $1 \in AA_1$ ou $t_n \in AA_1$.
2. Les unités de temps 1 et t_n valent deux arêtes différentes issues de A . Alors A “contribue directement” à deux sommets de degré 2 - appelons-les A_1 et A_2 -, mais cela nécessite qu'au moins un autre sommet de degré 3 ou plus vienne contribuer directement à A_1 et A_2 en ayant 1 ou t_n sur une des arêtes incidentes à chacun d'entre eux.

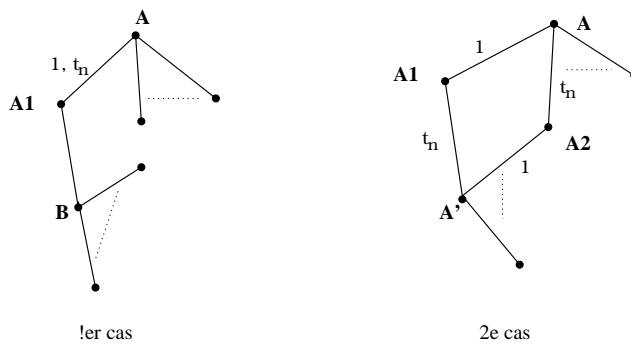


Figure 4.5: Existence de sommets de degré 2 dans un MGG_{2n}

Donc, si dans un MGG_n (n étant pair et vérifiant les hypothèses de la propriété), on a q sommets de degré 3 ou plus, on a nécessairement au plus q sommets de degré 2.

Partant de cette constatation, supposons que $G(n) = n + p$, où p est un entier positif ou nul. Sachant que lorsque n est pair, il n'existe pas de sommet de degré 1, on a au plus $2 \times p$ sommets de degré 3 ou plus. Il s'agit en effet de la séquence de degrés suivante : $222 \dots 233 \dots 3$, contenant $(n - 2 \times p)$ sommets de degré 2 et $2 \times p$ sommets de degré 3.

Alors, tant que $n - 2 \times p > 2 \times p$, on sait que l'hypothèse $G(n) = n + p$ n'est pas viable, et par conséquent que $G(n) \geq n + p + 1$. La valeur maximale de p pour laquelle $n > 4 \times p$ est alors :

- $\lfloor n/4 \rfloor$ si n n'est pas multiple de 4;
- $n/4 - 1$ sinon.

Ce qui démontre la propriété.

Exemples :

1. Pour $n=18$, $G(18) \geq 23$;
2. Pour $n=20$, $G(20) \geq 25$;
3. Pour $n=22$, $G(22) \geq 28$.

Cas où $3 \times 2^{k-2} \leq n \leq 2^k$

Dans ce cas, une propriété, plus forte que la précédente, existe.

Propriété : Pour tout n pair tel que $3 \times 2^{k-2} \leq n \leq 2^k$ ($k \geq 4$), alors $G(n) \geq \frac{3 \times n}{2}$.

Preuve : Elle nécessite tout d'abord de démontrer le lemme suivant.

Lemme : Pour tout n pair tel que $3 \times 2^{k-2} \leq n \leq 2^k$ ($k \geq 4$), alors il n'existe pas de sommet de degré 2 dans un MGG_n .

Preuve du lemme : Supposons avoir un MGG_n pratiquant l'échange total en temps k et contenant au moins un sommet A de degré 2. Construisons alors le MBT de racine A : ce MBT possède alors $N = 3 \times 2^{k-2} + 1$ sommets. Donc, pour tout $n > N$ (c'est-à-dire pour tout $n \geq 3 \times 2^{k-2} + 2$), un tel sommet ne peut exister.

Si $n = 3 \times 2^{k-2}$, on s'aperçoit alors que 1 et 2 doivent nécessairement valuer les arêtes issues de A pour que $N \geq n$.

De manière symétrique, si l'on construit le RBT de racine A , on s'aperçoit qu'il est à $N = 3 \times 2^{k-2} + 1$ sommets et que les unités de temps $(k - 1)$ et k valent nécessairement les arêtes issues de A afin que $N \geq n$.

En combinant ces deux informations, deux schémas possibles existent alors, ainsi que la figure 4.6 le montre.



Figure 4.6: Deux valuations possibles pour les arêtes issues de A

Dans les deux cas, on voit que $N = 3 \times 2^{k-2} - 2$, c'est-à-dire $N < n$. Il y a donc contradiction, ce qui prouve le lemme.

Comme on sait que, sous les hypothèses de la propriété, il n'existe pas de sommet de degré 2, et que, pour tout n pair, il n'existe pas de sommet de degré 1, on en déduit alors que tout sommet d'un MGG_n est de degré supérieur ou égal à 3. Donc le nombre d'arêtes sera supérieur ou égal à $\frac{3 \times n}{2}$.

Exemples :

1. Dans le cas où $n = 24$, $G(n) \geq 36$;
2. Dans le cas où $n = 26$, $G(n) \geq 39$.

4.2.3 Bornes inférieures pour $G(2m + 1)$

Dans ce paragraphe, diverses bornes seront données selon les valeurs - ou les intervalles de valeurs - de n . En effet, plus n est proche de $2^k - 1$, plus les contraintes sont grandes sur les

MGG correspondants, et meilleures en sont les bornes.

Propriété générale

Propriété : Pour tout n impair ($n \geq 13$), $G(n) \geq n + 1$.

Preuve : On sait déjà que $G(n) \geq n$ pour tout $n \geq 4$. Reste à démontrer que $G(n) \neq n$.

Si $G(n) = n$, penchons-nous sur les différentes séquences de degrés possibles pour les sommets d'un tel graphe. Tout d'abord, on constate qu'on ne peut avoir d'arête de type (1,2) : en effet, s'il en existait, on aurait un isthme autre que l'arête de type (1,2), et qui serait l'autre arête incidente au sommet de degré 2.

D'autre part, toute arête du type (1, p) où $p \geq 4$ est également exclue, car s'il en existait au moins une, aucune séquence de degrés possible ne saurait satisfaire l'équation : Somme des degrés des sommets = $2 \times n$.

Par conséquent, il ne peut exister que des sommets de degré 2 et des arêtes de type (1,3). Considérons alors les deux cas suivants :

- 1er cas : Il n'existe pas d'arête de type (1,3). La séquence de degrés devient alors : $222 \dots 2$, c'est-à-dire que le graphe considéré est le cycle de longueur n . Or $d(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$, et $\lfloor n/2 \rfloor > \lceil \log_2(n) \rceil + 1$ pour tout $n \geq 13$. Donc C_n ne peut pas être MGG quel que soit $n \geq 13$.

- 2e cas : Il existe au moins une arête de type (1,3).

Remarque : au mieux, il en existe $\lfloor n/2 \rfloor$.

Alors, on construit le MBT de racine A , le sommet de degré 1 contribuant à cette arête. Quelle que soit la séquence de degrés considérée (c'est-à-dire quel que soit le nombre d'arêtes de type (1,3)), le MBT de racine A sera au mieux à $N = 4 \times t - 8$ sommets, où t est le temps d'échange total dans le graphe.

Or, $n > N = 4 \times t - 8$, c'est-à-dire $n > 4 \times \lceil \log_2(n) \rceil - 4$ pour tout $n \geq 13$. Donc aucune des séquences de degrés comportant une ou plusieurs arêtes de type (1,3) n'est viable.

Ainsi, quelle que soit la séquence de degrés considérée, elle ne permet pas au graphe de pratiquer l'échange total en temps t . Donc l'hypothèse $G(n) = n$ est fautive, et $G(n) \geq n + 1$.

Cas où $3 \times 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^k - 1$

Propriété : Pour tout n impair tel que $3 \times 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^k - 1$ ($k \geq 5$), alors :

$$G(n) \geq n + \lfloor n/6 \rfloor + 1.$$

Preuve : On sait que pour ces valeurs de n , il n'existe pas d'arête de type (1,3); intéressons-nous donc aux sommets de degré 2 pouvant être présents dans un MGG d'ordre n .

Tout d'abord, si on a un sommet de degré 2, les arêtes qui sont issues de celui-ci sont nécessairement évaluées par 1 et ($k + 1$). De plus, si deux sommets de degré 2 sont adjacents, on sait qu'ils suivent un des quatre schémas présentés à la propriété du paragraphe 3.5.2 (cf. figure 3.6).

Il s'agit maintenant de s'interroger sur la manière dont les sommets de degré 2 vont pouvoir être "placés" grâce à la présence de sommets de degré 3 ou plus. Au mieux (c'est-à-dire pour obtenir le maximum de sommets de degré 3 ou plus), il ne faut avoir que des arêtes de type (1,4) et des sommets de degré 3.

Or, un sommet de degré 3 peut participer au placement de 2 sommets de degré 2 au mieux, en vertu des propriétés des sommets de degré 2. De manière analogue, on constate qu'un sommet de degré 4 participant à une arête de type (1,4) peut participer au placement d'un sommet de degré 2 au mieux, car 1 et $(k + 1)$ valent l'arête de type (1,4).

Supposons alors que $G(n) = n + p$, et que l'on ait i arêtes de type (1,4) et j sommets de degré 3 (avec $i + j = 2 \times p$). Alors nous avons $(n - 2 \times i - j)$ sommets de degré 2 à placer dans le graphe, pour $(i + 2 \times j)$ sommets de degré 2 effectivement plaçables.

Donc, tant que $n - 2 \times i - j > 2 \times j + i$, l'assertion $G(n) = n + p$ sera fautive. Cette inégalité nous donne $n > 3 \times (i + j)$, c'est-à-dire $n > 6 \times p$. Donc, tant que $p < \lfloor n/6 \rfloor$, $G(n) \geq n + p + 1$. Or, n ne peut être multiple de 6, puisque n est impair, donc la propriété est prouvée.

Exemples :

1. Dans le cas où $n = 13$, $G(n) \geq 16$;
2. Dans le cas où $n = 25$, $G(n) \geq 30$.

Cas où $n = 2^k - 1$

Propriété : Pour tout $n = 2^k - 1$ ($k \geq 4$), alors :

- $G(n) \geq n + \lfloor n/5 \rfloor + 1$ si $n \neq 5 \times p$;
- $G(n) \geq \frac{6 \times n}{5}$ si $n = 5 \times p$.

Preuve : Pour une telle valeur de n , on sait qu'il n'existe pas d'arête de type (1,3) dans un MGG_n . On va alors raisonner sur les sommets de degré 2. En effet, on sait également qu'on a dans un MGG_n au plus deux sommets de degré 2 adjacents, et qu'un sommet de degré 2 possède 1 et $(k + 1)$ sur ses arêtes incidentes.

De plus, si on a deux sommets de degré 2 adjacents, ils suivent alors un des trois schémas d'échange total présentés à la figure 4.7.

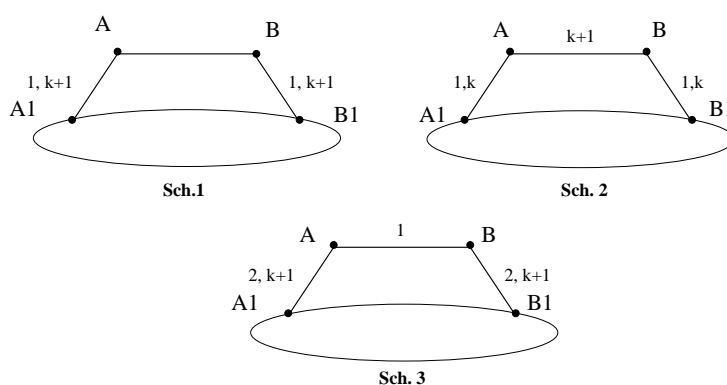


Figure 4.7: Adjacences possibles de sommets de degré 2 dans un MGG_{2^k-1}

Ceci se démontrant une fois de plus via les MBT et RBT, en gardant à l'esprit que pour A et B , 1 et $(k + 1)$ valent nécessairement leurs arêtes incidentes.

Alors, partant de ces considérations, on suppose que $G(n) = n + p$, p étant un entier positif quelconque. Afin de permettre la “présence” de sommets de degré 2, mieux vaut une séquence de degrés comportant uniquement des sommets de degré 3 et des sommets contribuant aux arêtes (1,4). Or, toute arête de type (1,4) étant évaluée à la fois par 1 et $(k + 1)$, le sommet de degré 4 correspondant ne peut être adjacent à aucun sommet de degré 2.

De plus, tout couple de sommets de degré 3 est au mieux adjacent à 3 sommets de degré 2. Si on suppose avoir i arêtes de type (1,4) et j sommets de degré 3 dans la séquence de degrés considérée (avec $i + j = 2 \times p$), on a alors $(n - 2 \times i - j)$ sommets de degré 2 dans le graphe correspondant. Or, seuls $\frac{3 \times j}{2}$ sommets de degré 2 au mieux pourront être placés dans le graphe. Donc, tant que $n - 2 \times i - j > \frac{3 \times j}{2}$, la séquence de degrés ne sera pas viable.

Cette inégalité donne alors : $n > 2 \times p + j/2$. Elle ne dépend donc plus du nombre d’arêtes (1,4). Au pire, on a donc $i = 0$ et $j = 2 \times p$, et l’inégalité devient : $n > 5 \times p$.

Donc, tant que $p < n/5$, aucune séquence de degrés correspondant à $G(n) = n + p$ ne sera valable, ce qui démontre la propriété.

Exemples :

- Pour $k = 4$, $G(15) \geq 18$;
- Pour $k = 5$, $G(31) \geq 38$;
- Pour $k = 6$, $G(63) \geq 76$;
- Pour $k = 7$, $G(127) \geq 153$.

Chapitre 5

Etude de cas particuliers

Après avoir énoncé diverses propriétés générales, nous allons maintenant nous pencher sur différents cas particuliers, qui contribueront à compléter le tableau des résultats donné au paragraphe 2.2.3.

5.1 Dénombrement des MGG_n pour $1 \leq n \leq 12$

Connaissant les valeurs de $G(n)$ pour tout $n \leq 12$, il est intéressant de pouvoir dénombrer les différents MGG non isomorphes d'ordre n . Un MGG_n peut avoir différents schémas d'échange total (c'est-à-dire que pour un même graphe, plusieurs systèmes de valuations sont possibles afin de pratiquer l'échange total sur ce graphe). Cependant, nous ne nous intéresserons guère à cet aspect par la suite : seuls les "différences" entre graphes non valués seront prises en compte.

5.1.1 Dénombrement des MGG_n pour $1 \leq n \leq 4$

- Lorsque $n = 1$, le graphe est réduit à un sommet et $G(1) = 0$.
- Lorsque $n = 2$, le graphe étant connexe et sans boucle, il n'y a qu'une arête joignant les deux sommets, et $G(2) = 1$.
- Lorsque $n = 3$, on sait que $G(3) = 2$. Le graphe est alors la chaîne P_3 (figure 5.1).

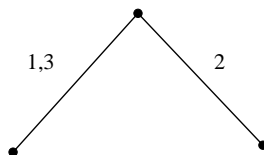


Figure 5.1: Le seul MGG à 3 sommets

- Lorsque $n = 4$, on sait que $G(4) = 4$. Or, on sait également - n étant pair - qu'il n'existe pas de sommet de degré 1. La seule séquence de degrés viable est alors la suivante : 2222, c'est-à-dire que le graphe n'est autre que C_4 . Le seul MGG_4 est donc C_4 (figure 5.2).

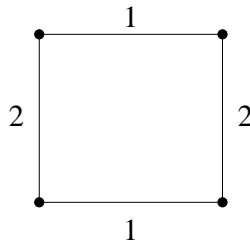


Figure 5.2: Le seul MGG à 4 sommets

5.1.2 Dénombrement des MGG_n pour $5 \leq n \leq 8$

- Lorsque $n = 5$, on sait que $G(5) = 5$. Trois séquences de degrés sont alors possibles :
 1. La séquence 2 (1 3) (1 3), c'est-à-dire avec deux arêtes de type (1,3), qui donne un seul graphe, pour lequel on montre aisément qu'il n'est pas MGG. Cette séquence n'est donc pas viable.
 2. La séquence 2 2 2 (1 3), qui, elle aussi, engendre un seul graphe. Ce graphe permet l'échange total en temps $t = 4$ en suivant le schéma indiqué sur la figure 5.3. Il est donc MGG_5 .
 3. La séquence 2 2 2 2 2, qui, on le sait, donne le cycle C_5 . Or, en suivant par exemple le schéma d'échange total indiqué sur la figure 5.3, ce graphe est MGG.

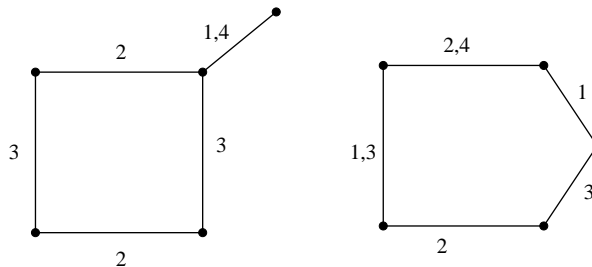


Figure 5.3: Les deux MGG à 5 sommets

- Lorsque $n = 6$, on sait que $G(6) = 6$. Or, n étant pair, on sait qu'il n'existe pas de sommet de degré 1. La seule séquence de degrés devient alors 2 2 2 2 2 2, c'est-à-dire celle correspondant au cycle C_6 , qui pratique l'échange total en suivant le schéma de la figure 5.4.
- Lorsque $n = 7$, on sait que $G(7) = 7$. De même que pour $n = 5$, différentes séquences de degrés sont possibles selon le nombre d'arêtes de type (1,3) présentes dans le graphe.
 1. La séquence 2 (1 3) (1 3) (1 3), ce qui donne l'unique graphe de la figure 5.5. Ce graphe est capable de pratiquer l'échange total en temps $t = 4$.

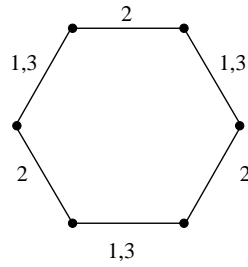


Figure 5.4: Le seul MGG à 6 sommets

2. La séquence 2 2 2 (1 3) (1 3), que l'on peut aussi voir comme étant $C_5 + 2$ arêtes (1,3) et qui donne deux graphes non isomorphes.
Or, on montre facilement qu'aucun de ces deux graphes ne permet de pratiquer l'échange total en temps $t = 4$.
3. La séquence 2 2 2 2 2 (1 3), c'est-à-dire $C_6 + 1$ arête (1,3), et qui donne un unique graphe, pour lequel on montre également qu'il n'est pas MGG.
4. Enfin, la séquence 2 2 2 2 2 2 2, c'est-à-dire celle correspondant à C_7 . Or, on sait que pour tout sommet de C_7 , l'unité de temps 1 value nécessairement une des arêtes issues de ce sommet. De plus, si elle value une des arêtes, elle ne value pas l'autre. De proche en proche, sur les différents sommets de C_7 , on effectue le même raisonnement. Or, C_7 ayant un nombre impair d'arêtes, on aboutit à une contradiction. Donc C_7 n'est pas MGG.

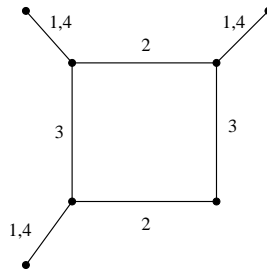


Figure 5.5: Le seul MGG à 7 sommets

- Lorsque $n = 8$, on sait que $G(8) = 12$. De plus, Labahn [13] a montré que seuls deux graphes non isomorphes étaient MGG_8 : il s'agit de l'hypercube Q_3 et du "twisted hypercube" (hypercube tordu), représentés tous deux - avec un schéma d'échange total possible pour chacun d'eux - dans la figure 5.6.

5.1.3 Dénombrement des MGG_n pour $9 \leq n \leq 12$

- Lorsque $n = 9$, on sait que $G(9) = 9$. Le raisonnement sur les séquences de degrés reste le même que pour $n = 5$ et $n = 7$, c'est-à-dire que, selon le nombre d'arêtes de type (1,3)

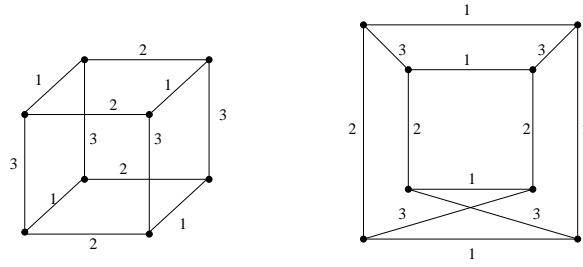


Figure 5.6: Les deux MGG à 8 sommets

dans le graphe, on a cinq séquences de degrés différentes.

1. La séquence $2 (1\ 3) (1\ 3) (1\ 3) (1\ 3)$, ou $C_5 + 4$ arêtes $(1,3)$, qui engendre un seul graphe qui ne peut pratiquer l'échange total en temps 5.
 2. La séquence $2\ 2\ 2 (1\ 3) (1\ 3) (1\ 3)$, ou $C_6 + 3$ arêtes $(1,3)$, qui engendre les trois premiers graphes de la figure 5.7, tous MGG (en suivant, par exemple, chacun des schémas d'échange total indiqués sur les graphes).
 3. La séquence $2\ 2\ 2\ 2\ 2 (1\ 3) (1\ 3)$, ou $C_7 + 2$ arêtes $(1,3)$, engendrant elle aussi trois graphes, dont deux seulement pratiquent l'échange total en temps 5. Ils sont présentés également à la figure 5.7 avec un schéma d'échange total viable pour chacun d'entre eux.
 4. La séquence $2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 (1\ 3)$, qui n'engendre qu'un seul graphe. Il est présenté figure 5.7, avec un schéma d'échange total montrant qu'il est MGG.
 5. La séquence $2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$, ou encore C_9 . De la même manière que pour $n = 7$, on montre, via les MBT, que tout sommet de C_9 possède nécessairement la valuation 1 sur une de ses arêtes adjacentes. En faisant le raisonnement de proche en proche, et le nombre d'arêtes du graphe étant impair, on aboutit à une contradiction. Donc C_9 n'est pas MGG.
- Lorsque $n = 10$, on sait que $G(10) = 13$, et Labahn [13] a montré que les seuls MGG_{10} existants sont ceux de la figure 5.8.
 - Lorsque $n = 11$, on sait que $G(11) = 11$. Le raisonnement s'applique alors exactement de la même manière que pour $n = 7$ et $n = 9$: on détaille les séquences de degrés possibles, les graphes que chacune d'elles engendre, et on s'interroge alors sur la capacité du graphe à pratiquer l'échange total en temps minimum. De la sorte, on montre que le seul MGG_{11} est celui de la figure 5.9, sur lequel un schéma d'échange total est proposé.
 - Lorsque $n = 12$, Labahn [13] a montré que $G(n) = 18$. D'autre part, les MGG_{12} ont été dénombrés, et il en existe 9. Ils sont présentés en annexe au chapitre 8.2.

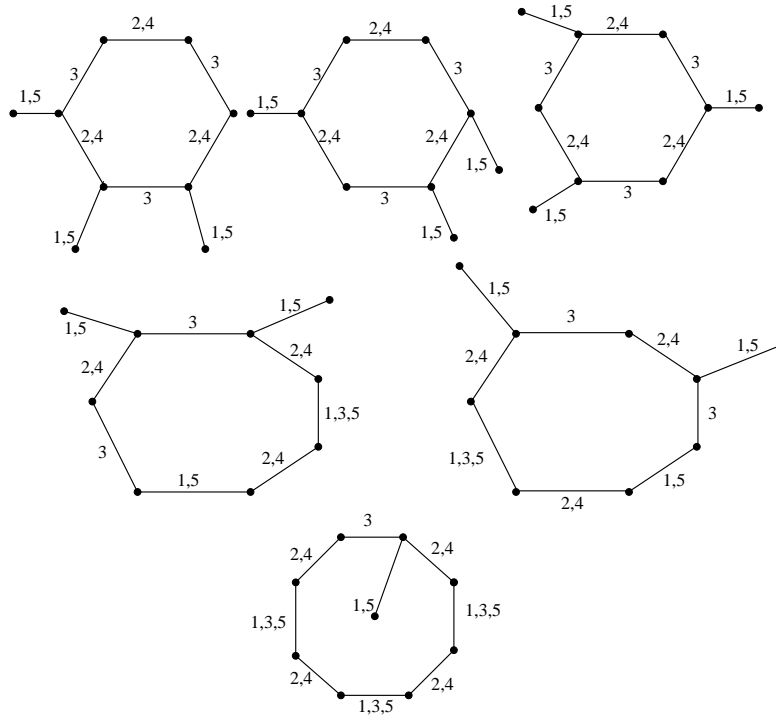


Figure 5.7: Les six MGG à 9 sommets

5.2 Recherche de $G(13)$ et $G(15)$

Les deux cas $n = 13$ et $n = 15$ se traitent de manière analogue. Cependant, pour $n = 13$, la preuve du résultat exige de détailler de façon plus pointue les différents cas de figure. Ainsi, nous allons aborder de plus près le cas $n = 13$, et, en prenant les mêmes principes directeurs, voir le cas $n = 15$ de manière plus rapide.

5.2.1 Première approche

Propriétés :

- $16 \leq G(13) \leq 17$;
- $18 \leq G(15) \leq 19$.

Preuve : En effet, deux propriétés nous donnent ces valeurs :

1. Les propriétés du paragraphe 4.2.3 qui indiquent que $G(13) \geq 13 + \lfloor 13/6 \rfloor + 1$, donc que $G(13) \geq 16$ et que $G(15) \geq \frac{6 \times 15}{5}$, c'est-à-dire $G(15) \geq 18$.
2. La propriété du paragraphe 4.1.4 qui indique que $G(13) \leq G(8) + 5$, c'est-à-dire $G(13) \leq 17$. De la même manière, $G(15) \leq 19$.

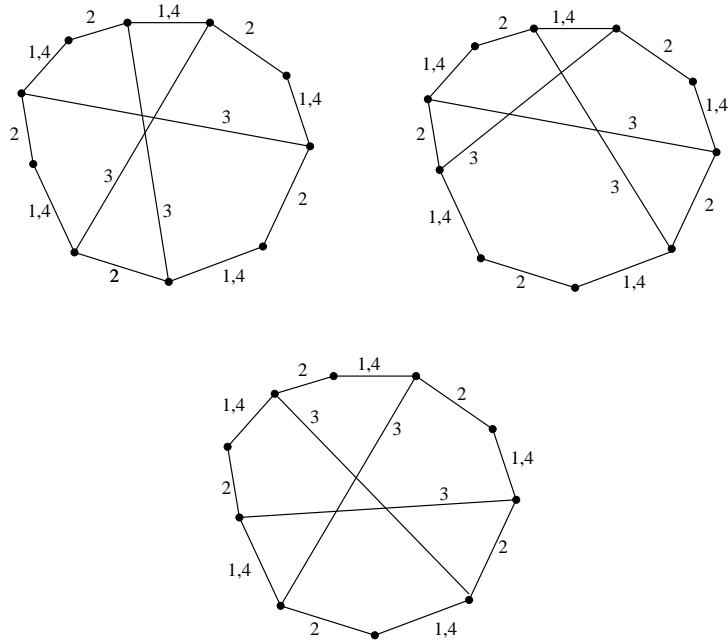


Figure 5.8: Les trois MGG à 10 sommets

5.2.2 Détermination de $G(13)$

Remarques préliminaires

Il s'agit ici de se donner des "outils" afin de déterminer les valeurs exactes de $G(13)$ et $G(15)$. Ce seront pour la plupart des résultats concernant les degrés des sommets et les valuations des arêtes dans un MGG_n .

Propriétés concernant les MGG_{13}

- Dans un MGG_{13} , s'il existe un sommet de degré 2, alors nécessairement 1 et 5 valent les arêtes issues de ce sommet. Ceci étant connu grâce à la propriété du paragraphe 3.3.

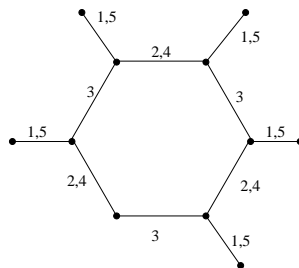


Figure 5.9: Le seul MGG à 11 sommets

- Dans un MGG_{13} , s'il existe une arête $(1,p)$, alors nécessairement $p = 4$.
En effet, il n'existe pas d'arête $(1,2)$, sinon un isthme autre qu'une arête $(1,p)$ existerait. De plus, il ne peut exister d'arête $(1,q)$ où $q \geq 5$, puisque l'arête $(1,q)$ nécessite d'être évaluée par deux unités de temps, et que nous n'en avons que 5 à notre disposition. De plus, ainsi que nous l'avons démontré dans le paragraphe 3.4, on sait qu'il n'existe pas d'arête de type $(1,3)$.
- Dans un MGG_{13} , s'il existe une arête $(1,4)$, alors elle suit nécessairement un des deux schémas de la figure 5.10, les sommets A , B et C étant de degré 3 ou plus, et distincts deux à deux.

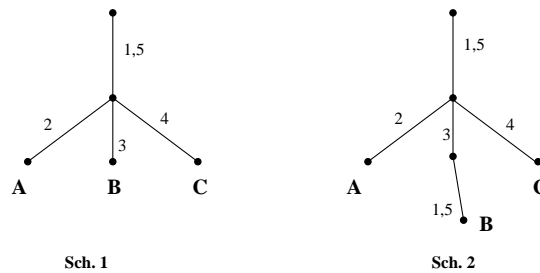


Figure 5.10: Arêtes de type $(1,4)$: les seuls schémas possibles pour $n = 13$

Ceci se montre aisément par l'absurde en construisant les MBT issus du sommet de degré 1 et en montrant qu'ils ont toujours strictement moins de 13 sommets.

- De plus, dans un MGG_{13} :
 1. S'il existe une arête de type $(1,4)$, alors 3 autres sommets de degré 3 au moins sont nécessaires ;
 2. S'il existe deux arêtes de type $(1,4)$, alors 3 autres sommets de degré 3 au moins sont nécessaires ;
 3. S'il existe trois arêtes de type $(1,4)$, alors 4 autres sommets de degré 3 au moins sont nécessaires.

Ceci se démontre également en utilisant des RBT et/ou des MBT ayant pour racine un sommet de degré 1, et permet d'en déduire la propriété suivante : si $G(13) = 16$, alors il y a au plus deux arêtes de type $(1,4)$ dans le MGG_{13} .

- Enfin, concernant l'adjacence de sommets de degré 2, on sait qu'on a au plus deux sommets de degré 2 adjacents. Trois constatations sont alors à faire :
 1. Dans un MGG_{13} , si on a deux sommets de degré 2 adjacents, alors ils suivent l'un des 4 schémas présentés au paragraphe 3.5.2, figure 3.6.
Ceci se montrant également par le biais des MBT et RBT, tout en considérant que 1 et 5 appartiennent nécessairement aux arêtes issues de tout sommet de degré 2.
 2. Deux sommets de degré 2 adjacents ne peuvent être adjacents à un même sommet de degré 3 ou plus. En effet, on aurait alors une incompatibilité dans les valuations

des arêtes, sachant que l'adjacence de deux sommets de degré 2 est soumise à un des quatre schémas du paragraphe 3.5.2.

3. Un sommet A de degré 3 ou plus ne peut être adjacent à plus d'une chaîne de deux sommets de degré 2 (cf. figure 5.11). En effet, s'il en était ainsi, on obtiendrait un MBT de racine A à 12 sommets au plus.

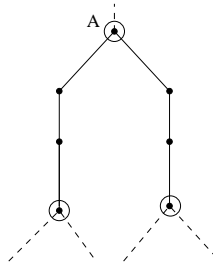


Figure 5.11: Configuration interdite

Ce “chapelet” de constatations diverses va nous aider à présent à passer en revue les différentes séquences de degrés possibles pour chaque valeur de $G(13)$, et à les écarter rapidement.

Détermination de $G(13)$

Partant de l'hypothèse $G(13) = 16$, il s'agit de déterminer toutes les séquences de degrés possibles. Puis, partant des différentes constatations faites au paragraphe précédent, nous allons tâcher de les éliminer. Ceci se faisant toujours par raisonnement sur le nombre de sommets de degré 2 qu'un MGG_{13} à p arêtes peut contenir, grâce aux remarques faites sur les arêtes issues d'un sommet de degré 2, que celui-ci soit adjacent à un autre sommet de degré 2 ou non.

Propriété : $G(13) \neq 16$.

Preuve : Parmi les treize séquences de degrés viables dans le cas où $G(13) = 16$, seules quatre d'entre elles permettent de “placer” suffisamment de sommets de degré 2. Ce sont les séquences suivantes :

1. La séquence 22222222 33334;
2. La séquence 2222222 333333;
3. La séquence 222222 (14)33333;
4. La séquence 22222 (14)(14)3333.

On montre alors que les deux dernières séquences de degrés ne peuvent pas convenir en poussant un peu plus loin la réflexion sur les arêtes de type (1,4) : en effet, on montre qu'une arête de type (1,4) nécessite dans ces deux cas la présence d'au moins six autres sommets de degré 3 ou plus.

En ce qui concerne les deux séquences de degrés restantes, on montre alors, en détaillant les différents schémas possibles concernant l'adjacence de deux sommets de degré 2, qu'elles ne

conviennent pas.

D'où l'on obtient la propriété suivante :

Propriété : $G(13) = 17$.

Conclusion : Le graphe d'échange total présenté dans la figure 4.4 au paragraphe 4.1.4 est MGG_{13} .

5.2.3 Détermination de $G(15)$

De la même manière qu'au paragraphe précédent, différentes constatations s'imposent avant d'aborder les différents cas pour $G(15)$, celles-ci se démontrant de la même manière que pour $n = 13$.

Remarques préliminaires

- Dans un MGG_{15} , s'il existe un sommet de degré 2, alors les arêtes qui sont issues de ce sommet sont nécessairement valuées par 1 et 5.
- Dans un MGG_{15} , les seules arêtes de type $(1,p)$ sont des arêtes $(1,4)$.
- S'il existe une arête de type $(1,4)$ dans un MGG_{15} , alors elle suit nécessairement le schéma 1 de la figure 5.10, avec également A , B et C de degré 3 ou plus, et distincts deux à deux.
- Dans un MGG_{15} :
 1. S'il existe une arête de type $(1,4)$, alors au moins 3 autres sommets de degré 3 ou plus sont nécessaires ;
 2. S'il existe deux arêtes de type $(1,4)$, alors au moins 4 autres sommets de degré 3 ou plus sont nécessaires ;
 3. S'il existe trois arêtes de type $(1,4)$, alors au moins 4 autres sommets de degré 3 ou plus sont nécessaires.

Ces propriétés impliquent alors directement le corollaire suivant : si $G(15) = 18$, alors il y a au plus deux arêtes de type $(1,4)$.

- Concernant l'adjacence de sommets de degré 2, on sait déjà que deux sommets de degré 2 au plus peuvent être adjacents. De plus, on sait que :
 1. Si on a deux sommets de degré 2 adjacents, alors ils suivent un des trois schémas présentés au paragraphe 4.2.3 concernant les MGG d'ordre $2^k - 1$.
 2. Deux sommets de degré 2 adjacents ne peuvent être adjacents au même sommet de degré 3 ou plus.
 3. Un sommet de degré 3 ou plus ne peut être incident à plus d'une chaîne de deux sommets de degré 2 (cf. figure 5.11).

Partant de ces considérations, on peut alors aborder les différents cas possibles pour $G(15)$ et les éliminer un à un.

Détermination de $G(15)$

Propriété : $G(15) = 19$.

Preuve : Si on suppose que $G(15) = 18$, alors, en étudiant les douze séquences de degrés viables, on s'aperçoit qu'aucune d'entre elles ne permet de "placer" suffisamment de sommets de degré 2. Ainsi, on en déduit que $G(15) \neq 18$, donc que $G(15) = 19$.

Conclusion : Le graphe d'échange total présenté dans la figure 4.4 au paragraphe 4.1.4 est MGG_{15} .

5.3 Recherche de $G(n)$ pour $17 \leq n \leq 32$

Il s'agit, dans cette partie, d'affiner les bornes de $G(n)$ pour n allant de 17 à 32, afin de compléter quelque peu le tableau des résultats. Nous allons tout d'abord nous pencher sur les cas $n = 17$ et $n = 19$, que nous traiterons simultanément, avant de voir, plus globalement, des encadrements de $G(n)$ pour les valeurs de n restantes.

5.3.1 Recherche de $G(17)$ et $G(19)$

Première approche

On sait que pour tout n impair supérieur ou égal à 13, $G(n) \geq n + 1$.

De plus, si l'on tient compte de la propriété 4.1.4, en partant d'un MGG_{10} , on peut construire un graphe d'échange total :

- à $N = 13 + 7 = 20$ arêtes pour $n = 17$;
- à $N = 13 + 9 = 22$ arêtes pour $n = 19$.

D'où le premier encadrement pour $n = 17$ et $n = 19$:

- $18 \leq G(17) \leq 20$;
- $20 \leq G(19) \leq 22$.

Etude du cas où $G(n) = n + 1$ ($n = 17, n = 19$)

Première approche

Supposons en effet que $G(n) = n + 1$. Alors plusieurs constatations s'imposent :

1. S'il existe des arêtes de type $(1,p)$, alors nécessairement $p \in \{3,4\}$.

En effet, montrons que toute autre possibilité n'est pas viable :

- Il n'existe pas d'arête de type $(1,p)$, où $p \geq 6$. En effet, le temps d'échange total étant de 6, et l'arête de type $(1,p)$ possédant deux valuations, on aurait alors au moins une arête impossible à valuer.

- Il n'existe pas d'arête de type (1,5). En effet, s'il en existait une, tous les autres sommets seraient soit de degré 2, soit des extrémités d'arêtes de type (1,3), puisque la somme des degrés des sommets est nécessairement $2 \times n + 2$.
Si on construit alors le MBT de racine A (sommet adjacent au sommet B de degré 5 participant à l'arête de type (1,5), et tel que $AB = \{5\}$), on s'aperçoit qu'il est au mieux à 12 sommets.
- Enfin, la deuxième propriété du paragraphe 3.2 nous indique qu'il ne peut exister d'arête de type (1,2).

2. S'il existe une arête de type (1,3) dans un MGG_n , alors elle suit l'un des trois schémas suivants :

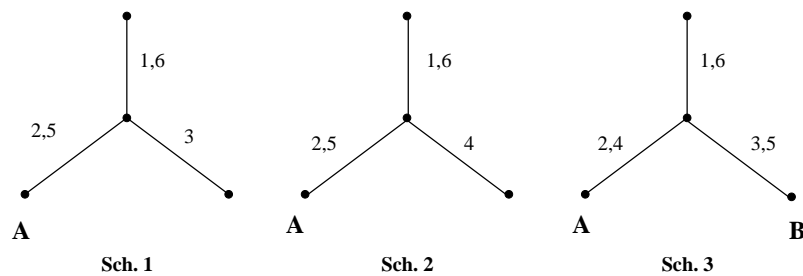


Figure 5.12: Arêtes de type (1,3) : les seuls schémas possibles pour $n = 17$ et $n = 19$

- Schéma 1** : $\deg(A) \geq 3$ et A n'est pas incident à une arête de type (1,3).
- Schéma 2** : $\deg(A) \geq 3$ et A n'est pas incident à une arête de type (1,3).
- Schéma 3** : $\deg(A) \geq 3$, $\deg(B) \geq 3$, et ni A ni B ne sont incidents à une arête de type (1,3).

Ceci se démontre en deux étapes : tout d'abord, on démontre que seuls ces trois schémas sont viables du point de vue de la valuation uniquement (c'est-à-dire sans tenir compte des degrés de A et de B), puis on raisonne par l'absurde à partir de chacun de ces trois schémas afin de démontrer les propriétés sur les degrés. Le tout se démontrant via la construction des MBT et/ou des RBT respectifs.

Ces deux constatations faites, on s'intéresse alors aux différentes séquences de degrés possibles lorsque $G(n) = n + 1$. Elles sont relativement nombreuses, mais peuvent se diviser en quatre groupes :

1. La séquence $\text{---}4$;
2. La séquence $\text{---}33$;
3. La séquence $\text{---}(1\ 4)\ 3$;
4. La séquence $\text{---}(1\ 4)(1\ 4)$.

où “ --- ” représente une séquence composée de sommets de degré 2 et de sommets incidents à des arêtes de type (1,3), le nombre de chacun d'entre eux n'étant a priori pas déterminé.

Etude des séquences de degrés

Pour chacun des quatre groupes de séquences de degrés considéré, trois sous-cas seront traités : absence d'arêtes de type (1,3), présence d'une seule arête de type (1,3) et présence de deux - ou plus - arêtes de type (1,3).

1. Séquence $\text{---} 4$

Alors on sait qu'il existe au plus une arête de type (1,3).

- (a) S'il n'existe pas d'arête de type (1,3), on a donc $(n - 2)$ sommets de degré 2. Il en existe alors au moins 4 à distance 4 (ou plus) du sommet de degré 4. Si on construit le MBT de racine un de ces 4 sommets, on voit qu'il est à 12 sommets au mieux.
- (b) S'il existe une arête de type (1,3), seuls les deux premiers schémas de la figure 5.12 sont viables.

Remarque : ces deux schémas se comportent comme des "symétriques" vis-à-vis des MBT et des RBT. En effet, le nombre de sommets du MBT de l'un sera égal au nombre de sommets du RBT de l'autre, et vice-versa. Ainsi, il suffira de raisonner sur l'un de ces deux schémas, et le résultat obtenu sera valable pour les deux.

Le schéma 2 donne dans ce cas un MBT de racine le sommet de degré 1 à 14 sommets maximum.

2. Séquence $\text{---} 33$

- (a) S'il n'existe pas d'arête de type (1,3), on raisonne de la même manière qu'au cas précédent, et on en déduit qu'il existe au moins 3 sommets de degré 2 à distance 3 (ou plus) des deux sommets de degré 3. Si l'on considère un de ces sommets de degré 2, son MBT est à 15 sommets au mieux.
- (b) S'il existe une seule arête de type (1,3), quel que soit le schéma considéré, le MBT de racine le sommet de degré 1 sera à 15 sommets au mieux.
- (c) S'il existe au moins deux arêtes de type (1,3), alors une première constatation s'impose : soit ces arêtes de type (1,3) sont telles qu'elles suivent toutes le schéma 3, soit elles suivent l'un et/ou l'autre des deux schémas restants à l'exception du schéma 3. En effet, $G(n)$ étant supposé égal à $n + 1$, et le schéma 3 nécessitant au moins deux sommets de degré supérieur ou égal à 3 : si une arête (1,3) suit le schéma 3, alors toute autre arête (1,3) devra "partager" un des deux sommets déjà utilisés par la première arête (1,3). Considérant les valuations des différents schémas, on s'aperçoit qu'il ne peut pas y avoir de "mixité" entre le schéma 3 et les autres.

Donc, deux cas se présentent :

- Toutes les arêtes (1,3) suivent le schéma 3. Alors nécessairement le schéma qui en découle voit tout MBT de racine un sommet de degré 1 être à 8 sommets au plus.
Remarque : cette considération est valable quelle que soit la séquence de degrés considérée, donc ce cas ne sera plus abordé par la suite.
- Si aucune arête (1,3) ne suit le schéma 3, supposons qu'une d'entre elles suive le schéma 1 (on a vu que, par "symétrie" entre MBT et RBT sur les schémas 1 et 2, le raisonnement est analogue). Alors tout RBT de racine le sommet de degré 1 contribuant à cette arête est à 15 sommets au plus.

3. Séquence $\text{---} (1\ 4)3$

- (a) S'il n'existe pas d'arête de type $(1,3)$, il existe alors au moins 2 sommets de degré 2 à distance 3 (ou plus) des sommets de degré 3 et 4. Si l'on considère un de ces deux sommets et qu'on construit son MBT, on constate qu'il est à 16 sommets au plus.
- (b) S'il existe une seule arête de type $(1,3)$, quel que soit le schéma considéré, on atteint via les MBT ou les RBT 16 sommets au mieux.
- (c) S'il existe au moins deux arêtes de type $(1,3)$, supposons de la même manière qu'une d'entre elles suive le schéma 1. Alors tout RBT de racine le sommet de degré 1 contribuant à cette arête est à 16 sommets au mieux.

4. Séquence $\text{---} (1\ 4)(1\ 4)$

- (a) S'il n'existe pas d'arête de type $(1,3)$: toujours par le même raisonnement, on en déduit qu'il existe au moins un sommet A de degré 2 à distance 3 ou plus des deux sommets de degré 4. Le MBT de racine A est alors au mieux à 16 sommets.
- (b) S'il existe une seule arête de type $(1,3)$, le schéma 3 donne un MBT à 15 sommets. Cependant, le schéma 1 peut donner un RBT à 17 sommets, qui est unique. Alors, si l'on construit le MBT de même racine, on constate qu'il est à 16 sommets au mieux. Le schéma 1 ne convient donc pas. En appliquant un raisonnement analogue pour le schéma 2, et en inversant les rôles des MBT et des RBT, on montre également que celui-ci ne convient pas.
- (c) S'il existe au moins deux arêtes de type $(1,3)$, on suppose qu'une des arêtes suit le schéma 1. Le RBT de racine le sommet de degré 1 contribuant à cette arête est alors à 17 sommets au mieux, et il est le seul. Alors le MBT de même racine est à 16 sommets.

Conclusion : Pour $n = 17$ et $n = 19$, $G(n) \neq n + 1$.

D'où les deux nouvelles inégalités suivantes :

- $19 \leq G(17) \leq 20$;
- $21 \leq G(17) \leq 22$;

5.3.2 Bornes pour $G(n)$ avec $17 \leq n \leq 32$

Explication des résultats :

- On a vu dans le paragraphe précédent que $19 \leq G(17) \leq 20$.
- D'après les propriétés vues aux paragraphes 4.2.2 et 4.1.1, on sait que :
 1. $G(18) \geq 18 + \lfloor 18/4 \rfloor + 1$, c'est-à-dire $G(18) \geq 23$;
 2. Puisque le temps d'échange total vaut 5, on sait que chaque sommet ne peut avoir plus de 5 arêtes. Donc, au pire, le MGG correspondant est 5-régulier. Ce qui implique que le nombre maximal de sommets est de $\frac{5 \times n}{2}$, d'où le résultat : $G(18) \leq 45$.
- On sait, d'après le paragraphe précédent que $19 \leq G(19) \leq 20$.

n	Borne inf.	Borne sup.	n	Borne inf.	Borne sup.
17	19	20	25	30	32
18	23	45	26	39	65
19	21	22	27	32	34
20	25	36	28	56	56
21	22	28	29	34	45
22	28	55	30	60	60
23	24	30	31	38	47
24	36	48	32	80	80

Figure 5.13: Bornes pour $G(n)$ ($17 \leq n \leq 32$)

- D'après les propriétés vues aux paragraphes 4.2.2 et 4.1.2, on sait que :
 1. $G(20) \geq (5 \times 20)/4$, c'est-à-dire $G(20) \geq 25$;
 2. $G(20) \leq 2 \times G(10) + 10$, c'est-à-dire $G(20) \leq 36$.
- D'après les propriétés des paragraphes 4.2.1 et 4.1.4, on sait que :
 1. $G(21) \geq 21 + 1$, c'est-à-dire $G(21) \geq 22$;
 2. $G(21) \leq G(14) + 7$, c'est-à-dire $G(21) \leq 28$.
- D'après les propriétés vues aux paragraphes 4.2.2 et 4.1.1, on sait que :
 1. $G(22) \geq 22 + \lfloor 22/4 \rfloor + 1$, c'est-à-dire $G(22) \geq 28$;
 2. Les MGG_{22} sont au pire 5-réguliers. Ce qui se traduit par l'inégalité suivante :
 $G(22) \leq 55$.
- D'après les propriétés des paragraphes 4.2.1 et 4.1.4, on sait que :
 1. $G(23) \geq 23 + 1$, c'est-à-dire $G(23) \geq 24$;
 2. $G(23) \leq G(14) + 9$, c'est-à-dire $G(23) \leq 30$.
- D'après les propriétés vues aux paragraphes 4.2.2 et 4.1.2, on sait que :
 1. $G(24) \geq (3 \times 24)/2$, c'est-à-dire $G(24) \geq 36$;
 2. $G(24) \leq 2 \times G(12) + 12$, c'est-à-dire $G(24) \leq 48$.
- D'après les propriétés des paragraphes 4.2.3 et 4.1.4, on sait que :
 1. $G(25) \geq 25 + \lfloor 25/6 \rfloor + 1$, c'est-à-dire $G(25) \geq 30$;
 2. $G(25) \leq G(14) + 11$, c'est-à-dire $G(25) \leq 32$.
- D'après les propriétés vues aux paragraphes 4.2.2 et 4.1.1, on sait que :
 1. $G(26) \geq (3 \times 26)/2$, c'est-à-dire $G(26) \geq 39$;
 2. Au pire, un MGG_{26} est 5-régulier, donc $G(26) \leq 65$.

- D'après les propriétés des paragraphes 4.2.3 et 4.1.4, on sait que :
 1. $G(27) \geq 27 + \lfloor 27/6 \rfloor + 1$, c'est-à-dire $G(27) \geq 32$;
 2. $G(27) \leq G(14) + 13$, c'est-à-dire $G(27) \leq 34$.
- D'après Labahn [13], on sait que $G(28) = 4 \times (2^4 - 2)$, c'est-à-dire $G(28) = 56$.
- D'après les propriétés des paragraphes 4.2.3 et 4.1.4, on sait que :
 1. $G(29) \geq 29 + \lfloor 29/6 \rfloor + 1$, c'est-à-dire $G(29) \geq 34$;
 2. $G(29) \leq G(16) + 13$, c'est-à-dire $G(29) \leq 45$.
- D'après Labahn [13], on sait que $G(30) = 4 \times (2^4 - 1)$, c'est-à-dire $G(30) = 60$.
- D'après les propriétés des paragraphes 4.2.3 et 4.1.4, on sait que :
 1. $G(31) \geq 31 + \lfloor 31/5 \rfloor + 1$, c'est-à-dire $G(31) \geq 38$;
 2. $G(31) \leq G(16) + 15$, c'est-à-dire $G(31) \leq 47$.
- D'après Labahn [13], on sait que $G(32) = 5 \times 2^4$, c'est-à-dire $G(32) = 80$.

Chapitre 6

Problèmes ouverts

6.1 Collusions entre MBG et MGG

Comme il apparaît long et parfois ardu de déterminer $G(n)$ avec précision et surtout d'en déduire des MGG_n correspondants, il peut être intéressant de se pencher sur les rapports qui peuvent exister entre MBG et MGG. De plus, les MBG - ou, tout du moins, les graphes de diffusion - sont a priori plus facilement constructibles [5]. En particulier, il peut être utile de voir si certains MBG ne peuvent pas être des graphes d'échange total : on aurait ainsi des graphes d'échange total avec "peu d'arêtes".

Or, si n est pair, on sait déjà que $G(n) \geq B(n)$, ce qui ne permet assurément pas d'avoir des graphes d'échange total strictement sous-graphes de MBG. La question de savoir si, partant d'un MBG d'ordre pair, on peut facilement (et d'une manière générale, voire systématique) ajouter des arêtes à celui-ci afin d'obtenir un graphe d'échange total, reste ouverte. On obtiendrait alors une classe "facilement" constructible de graphes d'échange total.

Dans le cas où n est impair, le problème se pose de façon différente, puisque les nombres d'arêtes des MBG et MGG ne sont a priori pas "ordonnables". Cependant, on peut remarquer que l'inclusion totale d'une classe dans l'autre n'est pas vérifiée. En effet, prenons par exemple les cas $n = 5$ et $n = 7$.

- Lorsque $n = 5$, le graphe G_1 de la figure 6.1 est MBG (cf. [19]), et pratique la diffusion en temps 3. Or, ce graphe est incapable de pratiquer l'échange total en temps 4, puisqu'il comporte deux sommets de degré 1 adjacents au même sommet de degré 4. Donc un MBG n'est pas nécessairement graphe d'échange total.
- Lorsque $n = 7$, on a vu que le graphe de la figure 6.2 est MGG. Or ce graphe est tel que $d(A, B) = 4$. Il ne peut donc pas diffuser en temps 3. Donc un MGG n'est pas non plus nécessairement graphe de diffusion.

Donc, dans le cas où n est impair, contrairement au cas pair, un MGG n'est pas nécessairement graphe de diffusion. De la même manière, un MBG n'est pas nécessairement graphe d'échange total. Il serait donc intéressant de rechercher des graphes qui soient à la fois graphes de diffusion et graphes d'échange total, et qui soient minimaux pour cette propriété.

Or, on constate, pour les petites valeurs de n impaires (en réalité, $n \leq 21$), que $G(n) \leq B(n)$

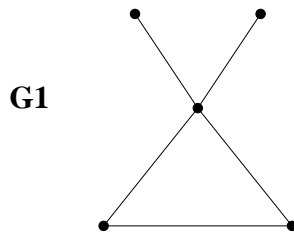


Figure 6.1: Un MBG à 5 sommets

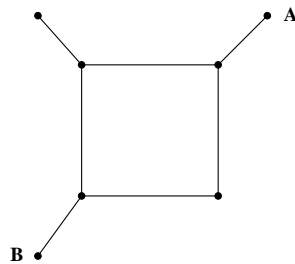


Figure 6.2: Le MGG à 7 sommets

(cf. [18] et [19]). Une façon d’aborder le problème serait alors de “gonfler” des MGG en leur ajoutant des arêtes, afin qu’ils satisfassent cette propriété.

6.2 Graphes contenant des MGG

Dans la même optique que précédemment, et également afin de revenir à des considérations plus concrètes, il est sans aucun doute nécessaire de se pencher sur le problème suivant :

Dans la même optique que précédemment, et également afin de revenir à des considérations plus concrètes, il est sans aucun doute nécessaire de se pencher sur le problème suivant : partant d’un graphe connu (qui représentera effectivement l’architecture des processeurs que possède la machine), quel est le “meilleur” sous-graphe - dans le sens de la minimisation du nombre d’arêtes - à n sommets qui pourra pratiquer l’échange total en temps minimum ?

En effet, si le problème des MGG en lui-même peut être vu comme indépendant de toute contrainte extérieure, il n’en est plus de même une fois qu’il est remis dans son contexte de départ : la communication entre processeurs devient alors totalement dépendante de la manière dont ceux-ci sont reliés, c’est-à-dire de l’architecture de la machine. Ainsi, les questions à se poser changent-elles d’angle de vue, et, partant d’une architecture donnée (qui correspondra le plus souvent à des graphes “classiques”, tels que la grille), il devient alors nécessaire de savoir si celle-ci possède des MGG comme sous-graphes, voire des graphes d’échange total avec peu d’arêtes.

6.3 Autres problèmes

D'autres questions et problèmes concernant les MGG restent bien évidemment en suspens, parmi lesquels ceux-ci :

- Dans le cas général, trouver des bornes plus fines pour $G(n)$;
- Dans certains cas particuliers - voire pour certaines valeurs "générales" de n -, déterminer exactement la valeur de $G(n)$. Cela pourrait par exemple être le cas pour des valeurs de n telles que 17, 19, 25 et 27, pour lesquelles des bornes assez fines ont été trouvées;
- Trouver des propriétés générales concernant la structure de tels graphes. En effet, au vu des MGG_n pour les petites valeurs de n , certaines conjectures seraient à prouver. Ces conjectures portent notamment sur l'absence de sommets de degré 2 et l'absence de triangles dans un MGG_n . Elles permettraient, sous réserve d'être vraies, d'affiner substantiellement les bornes de $G(n)$.

Chapitre 7

Conclusion

Malgré les nombreuses questions qui restent posées quant à la recherche concernant les MGG, un progrès significatif a été fait, tout au moins dans deux directions : la détermination de $G(13)$ et $G(15)$ et l'affinage des bornes concernant $G(n)$.

La détermination de $G(13)$ et $G(15)$ est satisfaisante dans la mesure où elle permet désormais de connaître toutes les valeurs de $G(n)$ pour n allant de 1 à 16. Quant aux bornes concernant $G(n)$, on peut regretter qu'elles ne soient meilleures bien qu'elles constituent déjà une avancée.

Cependant, ainsi que le chapitre précédent le souligne, beaucoup de questions restent posées et sans réponse. De plus, on peut regretter la lourdeur de la démarche lorsqu'il s'agit de déterminer $G(n)$ pour des valeurs précises de n . En effet, cette démarche est la suivante : étude des différentes séquences de degrés possibles pour chacune des valeurs possibles de $G(n)$, puis, pour chacune de ces séquences, étude des différents cas possibles. Néanmoins, elle apparaît - au moins jusqu'à présent - inévitable, puisque Mitchell et Hedetniemi [19], entre autres, ne procèdent pas d'autre manière afin de déterminer $B(n)$ pour n allant de 1 à 17.

Cependant, cette longue succession d'études de cas invite à généraliser les résultats autant que possible.

Enfin, outre la généralisation et l'affinage des résultats permettant d'éviter autant que faire se peut le détail de tous les cas envisageables, il apparaît raisonnable, voire sensé, de se pencher également vers la recherche de graphes d'échange total possédant "peu" d'arêtes. Ces graphes en effet pourraient rejoindre des considérations concrètes (contraintes sur l'architecture des processeurs, notamment); de plus, leur connaissance pourrait permettre d'en construire pour des valeurs quelconques de n , ce qui rejoindrait la nécessité de généralisation des résultats. Cependant, on peut toujours constater qu'il est beaucoup plus facile de raisonner sur des exemples précis que sur des généralités...

Chapitre 8

Annexe

8.1 Résumé des connaissances

Résumé des connaissances	
n pair	
$2^{k-1} + 2 \leq n \leq 3 \times 2^{k-2} - 2$	$3 \times 2^{k-2} \leq n \leq 2^k$
Pas de sommet de degré 1 Pas d'isthme	Pas de sommet de degré 1 Pas d'isthme
Si un sommet A est de degré 2, alors 1 et k valent les arêtes issues de A	Si un sommet A est de degré 2, alors 1 et k valent les arêtes issues de A
Pas 2 sommets de degré 2 adjacents	Pas de sommet de degré 2
$G(n) \geq n + \lfloor n/4 \rfloor + 1$ si $n \neq 4 \times p$ $G(n) \geq \frac{5 \times n}{4}$ sinon.	$G(n) \geq \frac{3 \times n}{2}$

Résumé des connaissances		
n impair		
$2^{k-1} + 1 \leq n \leq 3 \times 2^{k-2} - 1$	$3 \times 2^{k-2} + 1 \leq n \leq 2^k - 3$	$n = 2^k - 1$
Seul isthme : arête AB de type $(1, p)$ telle que $AB = \{1, k + 1\}$	Seul isthme : arête AB de type $(1, p)$ telle que $AB = \{1, k + 1\}$	Seul isthme : arête AB de type $(1, p)$ telle que $AB = \{1, k + 1\}$
	Un sommet A de degré 2 possède 1 et $k + 1$ sur ses arêtes incidentes	Un sommet A de degré 2 possède 1 et $k + 1$ sur ses arêtes incidentes
	Au plus 2 sommets de degré 2 adjacents	Au plus 2 sommets de degré 2 adjacents
	Pas d'arête de type $(1,3)$	Pas d'arête de type $(1,3)$
	4 schémas pour l'adjacence de 2 sommets de degré 2 (cf. 3.6)	3 schémas pour l'adjacence de 2 sommets de degré 2 (cf. 4.7)
$G(n) \geq n + 1$	$G(n) \geq n + \lfloor n/6 \rfloor + 1$	$G(n) \geq n + \lfloor n/5 \rfloor + 1$ si $n \neq 5 \times p$ $G(n) \geq \frac{6 \times n}{5}$ sinon.

8.2 Les différents MGG_{12}

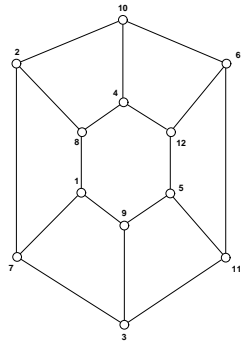


Figure 8.1: Les différents MGG_{12} - 1er graphe

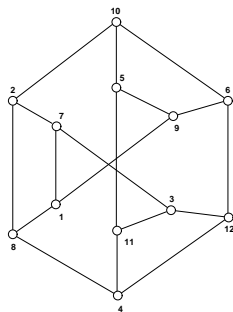


Figure 8.2: Les différents MGG_{12} - 2ème graphe

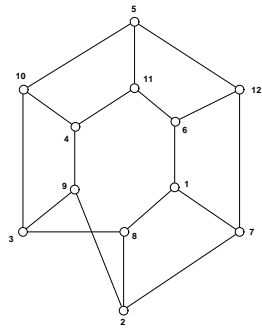


Figure 8.3: Les différents MGG_{12} - 3ème graphe

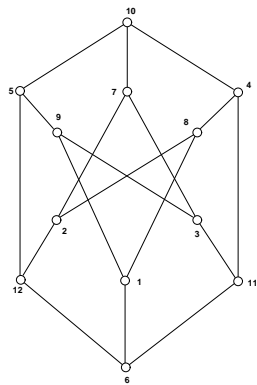


Figure 8.4: Les différents MGG_{12} - 4ème graphe

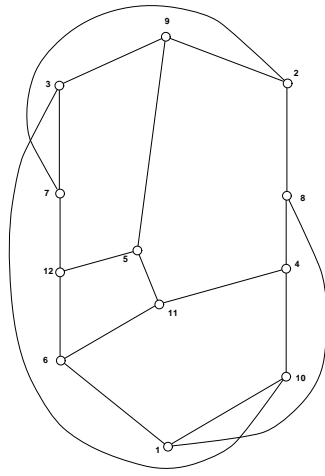


Figure 8.5: Les différents MGG_{12} - 5ème graphe

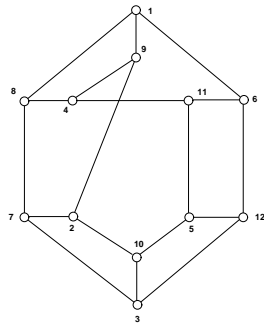


Figure 8.6: Les différents MGG_{12} - 6ème graphe

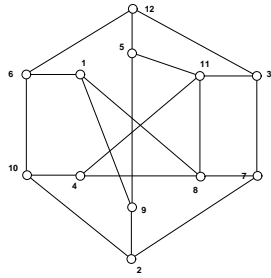


Figure 8.7: Les différents MGG_{12} - 7ème graphe

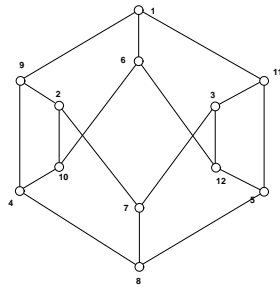


Figure 8.8: Les différents MGG_{12} - 8ème graphe

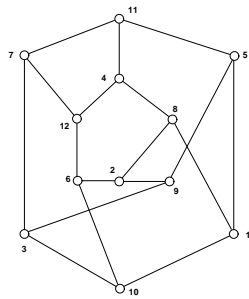


Figure 8.9: Les différents MGG_{12} - 9ème graphe

Bibliographie

- [1] J.C. Bermond, P. Fraigniaud
“Broadcasting and NP-completeness”
Tech, Rept., CMPT TR 92-1, Simon Fraser University, Burnaby, B.C. (1992).
- [2] J.C. Bermond, P. Fraigniaud, J.G. Peters
“Antepenultimate Broadcasting”
Tech, Rept., CMPT TR 92-3, Simon Fraser University, Burnaby, B.C. (1992).
- [3] J.C. Bermond, P. Hell, A.L. Liestman, J.G. Peters
“Sparse Broadcast Graphs”
Discr. Applied Math. **36** (1992) 97-130.
- [4] M.J. Dinneen, M.R. Fellows, V. Faber
“Algebraic Constructions of Efficient Broadcast Networks”
Preprint, 1991.
- [5] A. Farley
“Minimal Broadcast Networks”
Networks **9** (1979) 313-332.
- [6] A. Farley, S. Hedetniemi, S. Mitchell, A. Proskurowski
“Minimum Broadcast Graphs”
Discr. Math. **25** (1979) 189-193
- [7] L. Gargano, U. Vaccaro
“On the Construction of Minimal Broadcast Networks”
Networks **19** (1989) 673-689.
- [8] M. Grigni, D. Peleg
“Tight Bounds on Minimum Broadcast Networks”
SIAM J. Discr. Math. **4** (1991) 207-222.
- [9] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.L. Liestman
“A Survey of Gossiping and Broadcasting in Communication Networks”
Networks **18** (1988) 319-349.
- [10] L.H. Khachatrian, O.S. Harutonian
“Construction of New Classes of Minimal Broadcast Networks”
In *Conference on Coding Theory*, Armenia, 1990.

- [11] W. Knodel
“New Gossips and Telephones”
Discr. Math **13** (1975) 95.
- [12] R. Labahn
“A Minimum Broadcast Graph on 63 Vertices”
Manuscript, 1991.
- [13] R. Labahn
“Some Minimum Gossip Graphs”
Networks **23** (1993) 333-341.
- [14] R. Labahn
“The Telephone Problem for Trees”
Elektron. Informationsverarb. u. Kybernet. **22** (1986) 475-485.
- [15] R. Labahn, C. Pietsch
“Characterizing Minimum Gossip Graphs on 16 Vertices”
Preprint 91707, Institute of Discrete Mathematics, University of Bonn, 1991.
- [16] A.L. Liestman
“Fault-tolerant Broadcast Graphs”
Networks **15** (1985) 159-171.
- [17] A.L. Liestman, J.G. Peters
“Broadcast Networks of Bounded Degree”
SIAM J. Discr. Math. **1**(4) (1988) 531-540.
- [18] M. Mahéo, J.F. Saclé
“Some Minimum Broadcast Graphs”
Discr. Applied Math. **53** (1994) 275-285.
- [19] S. Mitchell, S. Hedetniemi
“A census of Minimum Broadcast Graphs”
J. Combin., Inform. & Systems Sci. **5** (1980) 141-151.
- [20] A. Proskurowski
“Minimum Broadcast Trees”
IEEE Trans on Comput. **30** (1981) 363-366.
- [21] J. de Rumeur
“*Communications dans les réseaux de processeurs*”
Etudes et recherches en informatique, Ed. Masson.
- [22] P.J. Slater, E. Cockayne, S.T. Hedetniemi
“Information Dissemination in Trees”
SIAM J. Comput. **10** (1981) 692-701.
- [23] X. Wang
Private communication, April 1986, cité dans [18]