Conversion de Longueur d'Onde dans les Réseaux Optiques $\left(\textit{Facteur d'Optimalité } \frac{5}{3}\right)$

Guillaume Fertin[1], Emmanuel Godard[2], André Raspaud[2]

[1]*IRIN UPRES-EA 2157, Université de Nantes*
2 rue de la Houssinière - BP 92208 - F44322 Nantes Cedex 3
fertin@irin.univ-nantes.fr

[2]*LaBRI U.M.R. 5800, Université Bordeaux 1*
351 Cours de la Libération - F33405 Talence Cedex
{godard,raspaud}@labri.fr

Nous prolongeons ici une étude, initiée dans [Tog00], concernant les convertisseurs en longueur d'onde dans un réseau optique, et l'influence de leur nombre sur le problème d'allocation de longueurs d'onde. Plus précisément, nous donnons des minorants et des majorants sur le nombre minimum de convertisseurs à placer dans un réseau optique afin que, pour tout ensemble de requêtes de routage dans ce réseau, le nombre de longueurs d'onde à allouer ne dépasse pas la charge maximale d'un lien d'un facteur $f = \frac{5}{3}$ (f sera appelé *facteur d'optimalité*). Ce problème est modélisable en théorie des graphes et est étudié sous le nom de problème du *minimum feedback vertex set*, ou MFVS. Dans ce papier, nous nous appuyons sur une autre notion, celle de *coloration acyclique* d'un graphe ; nous établissons une relation étroite entre le nombre minimum de couleurs nécessaire à la coloration acyclique d'un graphe et la cardinalité de son MFVS. Cela nous permet d'en déduire des résultats forts et généraux concernant le nombre minimum de convertisseurs en longueurs d'onde à placer dans un réseau pour certaines topologies données.

Keywords: réseau optique, routage en longueur d'onde, convertisseur, feedback vertex set, coloration acyclique

---

1 Introduction et Définitions

Tout comme dans l'article de Togni [Tog00], nous nous plaçons dans le cadre des r´eseaux tout-optique utilisant la technique de multiplexage en longueur d'onde (ou *WDM*) : plusieurs signaux peuvent traverser un même lien si les longueurs d'onde qui les portent sont diff´erentes. De plus, on utilise la commutation de circuits : `a chaque requête est associ´ee un chemin dans le r´eseau, et une longueur d'onde sur laquelle les donn´ees vont transiter.

La technologie tout optique permet de disposer de commutateurs autorisant une conversion des longueurs d'onde [RM96], donc pour un chemin associ´e `a une requête il est possible de modifier sa longueur d'onde en arrivant sur le noeud o`u se trouve le commutateur. Cela assouplit la contrainte qui veut qu'un lien dans le r´eseau ne soit pas travers´e par deux chemins ayant la même longueur d'onde. Si l'on dote chaque noeud du r´eseau d'un commutateur autorisant la conversion, alors le probl`eme d'affectation des chemins et des longueurs d'onde devient trivial. Cependant, le coût ´elev´e des commutateurs autorisant la conversion demande que l'on optimise (c'est-`a-dire que l'on minimise) leur nombre dans le r´eseau.

Plusieurs types de convertisseurs existent [RM96] : certains autorisent une conversion totale (de toute longueur d'onde vers toute autre), d'autres une conversion partielle. Nous nous placerons ici dans le premier cas ; plus pr´ecis´ement, chaque noeud du r´eseau sera soit ´equip´e d'un convertisseur autorisant une conversion totale, soit non ´equip´e. Enfin, nous supposerons donn´e l'ensemble des chemins satisfaisant les requêtes (en d'autres termes, nous ne nous posons pas ici le probl`eme de la d´etermination du routage).

Un r´eseau est mod´elis´e par un graphe orient´e sym´etrique $G^* = G(V,A)$ (et le graphe non orient´e sous-jacent `a G^* sera ici not´e G). Un *routage* R est un ensemble de chemins dirig´es, incluant ´eventuellement plusieurs mêmes chemins. La *charge* d'un arc $a \in A(G^*)$ pour le routage R est le nombre de chemins de

R qui traversent a. La *charge maximale* induite par R, $L(G^*,R)$ est le maximum des charges de a sur tous les arcs $a \in A(G^*)$. Soit X l'ensemble des noeuds de G^* munis d'un convertisseur ; le nombre minimum de longueurs d'onde $W(G^*,R,X)$ à affecter au réseau G^* pour le routage R est le nombre minimum de couleurs à affecter aux chemins de R de telle manière que (i) deux chemins de même couleur ne traversent pas le même arc (ii) tout chemin traversant un sommet de X est autorisé à changer de longueur d'onde. Par conséquent, $W(G^*,R) = W(G^*,R,\emptyset)$ représente le nombre minimum de longueurs d'onde dans un réseau non équipé de convertisseurs. D'une manière générale, on a $W(G^*,R,\emptyset) \geq L(G^*,R)$; d'autre part, il existe une infinité de cas pour lesquels $W(G^*,R,\emptyset) > L(G^*,R)$. Une très nombreuse littérature existe d'ailleurs, qui cherche à démontrer dans quels types d'ensembles de requêtes et/ou de topologies de réseau l'égalité peut être obtenue (voir entre autres [BBG$^+$97]). Ici, nous nous intéressons au problème suivant : étant donné un graphe G^*, trouver un ensemble de noeuds X de cardinalité minimale, tel que pour tout routage R on ait $W(G^*,R,X) \leq \frac{5}{3}L(G^*,R)$. Par homogénéité avec les notations de [Tog00], on appellera $C(G^*,\frac{5}{3})$ la cardinalité de l'ensemble X. Notons que la valeur $\frac{5}{3}$ pour le facteur d'optimalité découle du fait que dans tout arbre T, et pour tout routage R, on a $W(T,R,\emptyset) \leq \frac{5}{3}L(T,R)$ [KPEJ97].

Le *feedback vertex set*, ou *FVS* d'un graphe non orienté $G=(V,E)$ est un sous-ensemble des sommets de G dont la suppression induit un sous-graphe G' de G qui ne contient pas de cycle (en d'autre termes, qui soit une forêt). Quand la cardinalité d'un FVS est minimale, celui-ci est appelé *minimum feedback vertex set*, ou *MFVS*, et il est noté $\overline{V}(G)$. Trouver un MFVS dans un graphe G est NP-complet en général ; il existe cependant des heuristiques ayant facteur d'approximation 2 [BBF95]. Pour certaines topologies spécifiques, des algorithmes polynômiaux dédiés (et donnant un résultat exact) existent également (cf. par exemple le survey [FPR99]) . Notre intérêt pour le problème du MFVS s'explique par la proposition suivante.

Proposition 1 *[Tog00] Soit $G^* = (V,A)$ un graphe orienté symétrique et $G=(V,E)$ son graphe non orienté sous-jacent. Alors $C(G^*,\frac{5}{3}) = |\overline{V}(G)|$.*

Indication de Preuve : Supposons avoir déterminé $\overline{V}(G)$, et soit $X_0 = \overline{V}(G)$ l'ensemble des convertisseurs que nous plaçons dans le réseau. Remplaçons dans G chacun des sommets x_i de X_0, de degré d_i, par d_i sommets de degré 1. Le nouveau réseau obtenu est alors une forêt. Sachant que Kaklamanis et al. [KPEJ97] ont démontré que dans tout arbre T et pour tout routage R, on a $W(T,R,\emptyset) \leq \frac{5}{3}L(T,R)$, on en conclut que $C(G^*,\frac{5}{3}) \leq |X_0|$, c'est-à-dire $C(G^*,\frac{5}{3}) \leq |\overline{V}(G)|$. D'autre part, si on suppose $C(G^*,\frac{5}{3}) < |\overline{V}(G)|$, alors quel que soit l'ensemble X des convertisseurs choisi pour le réseau avec $|X| = C(G^*,\frac{5}{3})$, il existera dans le réseau un cycle ne contenant aucun sommet de X. On pourra alors toujours trouver un routage R pour lequel $W(G^*,R,X) = 2L(G,R) - 1 > \frac{5}{3}L(G,R)$. Donc $C(G^*,\frac{5}{3}) \geq \overline{V}(G)$ et l'égalité est démontrée. □

Il découle de cette proposition que rechercher le nombre minimum de convertisseurs nécessaires pour assurer un facteur d'optimalité $f = \frac{5}{3}$ équivaut à rechercher la cardinalité d'un MFVS dans le graphe non orienté modélisant le réseau.

Dans ce papier, nous mettons en lumière une relation étroite entre le problème du MFVS et un autre problème fréquemment étudié en théorie des graphes, celui de la *coloration acyclique*. Une *coloration acyclique* d'un graphe non orienté $G=(V,E)$ est une coloration de ses sommets, telle que : (i) deux sommets voisins ne possèdent pas la même couleur (ceci est également appelé *coloration propre*) et (ii) il n'existe pas de cycle bicolorié dans G. Le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier acycliquement G est appelé *nombre chromatique acyclique* de G, noté $a(G)$. Pour une famille $\mathcal{F}$ de graphes, le nombre chromatique acyclique de $\mathcal{F}$, noté $a(\mathcal{F})$, est le maximum des $a(G)$ sur tous les graphes $G \in \mathcal{F}$. La détermination de $a(G)$ pour un graphe G donné est un problème NP-complet dans le cas général ; cependant, depuis 25 ans, divers auteurs ont déterminé $a(\mathcal{F})$ pour différentes familles $\mathcal{F}$ de graphes ([Grü73, Bur79, Bor79, BKW99, BKRS01]).

Nous établissons ici une relation directe, pour tout graphe G, entre $a(G)$ et la cardinalité d'un de ses MFVS. Nous développons ensuite diverses techniques pour nous permettre d'obtenir des minorants et majorants sur la cardinalité d'un MFVS dans de grandes familles de graphes (graphes de degré maximum 3 ou 4, graphes planaires, k-arbres, etc). Dans certains cas, minorants et majorants coïncident ; lorsque ce n'est pas le cas, ils sont éloignés d'un facteur au plus égal à 2, et souvent strictement inférieur à 2. Nos bornes ne sont donc pas toujours optimales, mais elles présentent l'avantage de s'appliquer à des topologies très générales. Jusqu'à présent, des bornes très proches sur la cardinalité d'un MFVS existaient uniquement dans des topologies nettement plus restreintes (comme par exemple les grilles d-dimensionnelles, les hypercubes ou les graphes butterfly).

2 Nombre Chromatique Acyclique et Cardinalité d'un MFVS

Lemme 1 *Soit $G = (V,E)$ un graphe à $|V| = N$ sommets. Si $a(G) \le k$, alors $|\bar{V}(G)| \le \frac{k-2}{k} \cdot N$*

Preuve : Supposons avoir une coloration acyclique de G en k couleurs. On partitionne alors l'ensemble V des sommets de G en k classes $V_1, V_2, \dots V_k$, suivant les couleurs données aux sommets de G. Par définition de la coloration acyclique, on sait que pour tout $1 \le i < j \le k$, $V_i \cup V_j$ induit un sous-graphe de G qui est acyclique (et qui est donc une forêt). Posons maintenant $s_{i,j} = |V_i| + |V_j|$ pour tout $1 \le i < j \le k$. On a donc $\sum_{1 \le i < j \le k} s_{i,j} = (k-1)N$, car chaque $|V_i|$ apparaît $k-1$ fois dans cette somme. Cependant, il existe $A = \frac{k(k-1)}{2}$ termes $s_{i,j}$ dans cette somme. Donc il existe une paire (i_0, j_0) telle que $s_{i_0,j_0} \ge \frac{(k-1)N}{A}$, c'est-à-dire telle que $s_{i_0,j_0} \ge \frac{2N}{k}$. Soit $V_0 = V_{i_0} \cup V_{j_0}$; dans ce cas, $V - V_0$ est un FVS de cardinalité inférieure ou égale à $N \frac{2N}{k}$, c'est-à-dire à $\frac{k-2}{k} N$. □

Lemme 2 *Pour tout graphe G, $|\bar{V}(G)| \ge a(G) - 2$*

Preuve : Soit $\bar{V}(G)$ un FVS de G. Soit la coloration suivante : chaque sommet de $\bar{V}(G)$ possède une unique couleur. Les sommets restant, ie ceux de $V \backslash \bar{V}(G)$ (qui induisent une forêt) peuvent tous être coloriés acycliquement en 2 couleurs. Cette coloration étant propre et acyclique, on a $a(G) \le |\bar{V}(G)| + 2$. □

3 Nombre de Convertisseurs pour un Facteur d'Optimalité $f = \frac{5}{3}$

Formellement, la *cardinalité d'un MFVS d'une famille $\mathcal{F}$* de graphes est définie comme étant la cardinalité maximum d'un MFVS sur tous les graphes qui appartiennent à $\mathcal{F}$. Soit $\bar{V}(\mathcal{F})$ cette valeur. Un *majorant sur la cardinalité d'un MFVS dans $\mathcal{F}$* sera donc un majorant de $\bar{V}(G)$ pour tout $G \in \mathcal{F}$; et un *minorant sur la cardinalité d'un MFVS dans $\mathcal{F}$* sera un minorant de $\bar{V}(G)$ pour au moins un $G \in \mathcal{F}$.

Nous verrons que dans certains cas, minorant et majorant coïncident à une faible constante additive près, ce qui montre l'intérêt du Lemme 1 ; dans d'autres cas, minorant et majorant diffèrent d'une constante multiplicative c au plus égale à 2. Dans la plupart des cas, on aura d'ailleurs $c < 2$. Pour des raisons liées aux contraintes d'espace, seules quelques preuves seront développées par la suite. Notons seulement que pour les propositions décrivant l'existence d'un minorant M, la méthode de preuve consiste à construire, pour un entier N donné, un graphe G à N sommets ayant les propriétés voulues, et vérifiant $\bar{V}(G) \ge M$.

Enfin, pour une meilleure compréhension, nous donnons ici quelques définitions élémentaires de théorie des graphes : pour tout graphe (non orienté) G, son *ordre* est le nombre de ses sommets, et son *degré* est le nombre maximum, pris sur tous les sommets u de G, des liens issus de u. Enfin, le *graphe complet d'ordre n* (ou *clique de taille n*) est le graphe entièrement connecté ; il est noté K_n

3.1 Graphes de Degré Maximum 3 ou 4

Proposition 2 (Degré Maximum 3 - Majorant) *Pour tout graphe G de degré maximum 3 et d'ordre N, $|\bar{V}(G)| \le \frac{N}{2}$.*

Preuve : Grünbaum [Grü73] a montré que pour tout graphe G de degré maximum 3, $a(G) \le 4$. Par le Lemme 1, on en conclut que $|\bar{V}(G)| \le \frac{N}{2}$ pour tout graphe G d'ordre N et de degré maximum 3 . □

Proposition 3 (Degré Maximum 3 - Minorant) *Pour tout entier $N \ge 3$, il existe un graphe G de degré maximum 3 et d'ordre N, tel que $|\bar{V}(G)| = \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$.*

Preuve : Supposons $N = 3p + q$, $0 \le q \le 2$. Dans ce cas, on construit un cycle de longueur $2p + q$, C_{2p+q}, dont on nomme les sommets $u_1, u_2 \dots u_{2p+q}$. On ajoute alors un sommet v_i pour tout $1 \le i \le p$, ainsi que les arêtes (v_i, u_{2i-1}) et (v_i, u_{2i}). Le graphe G ainsi construit est de degré maximum 3, et de plus $|\bar{V}(G)| \ge p$ car il y a p K_3 arête-disjoints dans G (ceux induits par les sommets u_{2i-1}, u_{2i} et v_i $(1 \le i \le p)$). En réalité, on a $|\bar{V}(G)| = p$ car lorsqu'on retire les sommets u_{2i-1}, $1 \le i \le p$ et leurs arêtes incidentes dans G, on obtient alors un graphe acyclique. □

Proposition 4 (Degré Maximum 4 - Majorant) *Pour tout graphe G de degré maximum 4 et d'ordre N, $|\bar{V}(G)| \leq \frac{3N}{5}$.*

Preuve : Par [Bur79], on sait que pour tout graphe G de degré maximum 4, $a(G) \leq 5$ (ce résultat a également été démontré de façon indépendante par Kostochka). Le résultat est donc immédiat par application du Lemme 1. □

Proposition 5 (Degré Maximum 4 - Minorant) *Pour tout entier $N \geq 4$, il existe un graphe G de degré maximum 4 et d'ordre N, tel que $|\bar{V}(G)| \geq 2 \cdot \lfloor \frac{N}{4} \rfloor$.*

Preuve : On utilise ici deux graphes qui vont servir de base à la construction du graphe G d'ordre N cherché : il s'agit des graphes complets à 3 et 4 sommets, K_3 et K_4. Notons que pour tout $n \geq 3$, $|\bar{V}(K_n)| = n-2$ (en effet, si l'on retire un sommet dans K_n ainsi que ses arêtes incidentes, on obtient K_{n-1}, qui est acyclique ssi $n-1=2$). En particulier, $|\bar{V}(K_4)| = 2$ et $|\bar{V}(K_3)| = 2$.

Supposons maintenant que $N = 4p$. Dans ce cas, on construit G en prenant p copies de K_4 (que l'on appellera les $K_{4,i}$, $1 \leq i \leq p$), et en connectant un sommet de $K_{4,i}$ à un sommet de $K_{4,i+1}$ par une arête e_i, pour tout $1 \leq i \leq p-1$, de telle manière que le graphe obtenu reste de degré maximum 4 (ce qui est toujours possible : il suffit que tout sommet de $K_{4,i}$ participe à au plus une connection vers un autre $K_{4,j}$, $j \in \{i-1, i+1\}$). Le graphe G obtenu est d'ordre N, et il est facile de voir que $|\bar{V}(G)| \geq 2p$, car aucune arête e_i ne participe à un cycle dans G, et pour tout $K_{4,i}$, deux sommets au moins doivent être retirés en vue d'obtenir un graphe acyclique. Lorsque $N = 4p+1$ (resp. $N = 4p+2$), on ajoute une (resp. deux) arêtes pendantes au graphe G obtenu dans le cas précédent. On a alors $|\bar{V}(G)| \geq 2p$. Dans le dernier cas ($N = 4p+3$), on prend une copie de K_3 que l'on ajoute à la "chaîne de K_4" obtenue précédemment en joignant par une arête n'importe quel sommet v de G tel que $\deg(v) = 3$ à n'importe quel sommet de K_3. On a donc $|\bar{V}(K_3)| = 1$, et il faut alors retirer un sommet de plus afin d'obtenir un graphe acyclique. Donc $|\bar{V}(G)| \geq 2p+1$, ce qui, globalement, prouve le résultat. □

3.2 Graphes Planaires et 1-Planaires

Borodin [Bor79] a démontré que pour tout graphe planaire G, $a(G) \leq 5$. Il a également exhibé un exemple de graphe planaire pour lequel toute coloration acyclique nécessite au moins 5 couleurs ; il y a donc optimalité, et si $\mathcal{P}$ désigne la famille des graphes planaires, on a $a(\mathcal{P}) = 5$. En combinant ce résultat non trivial avec le Lemme 1, on obtient la proposition suivante.

Proposition 6 (Planaires - Majorant) *Pour tout graphe planaire G d'ordre N, $|\bar{V}(G)| \leq \frac{3N}{5}$.*

Proposition 7 (Planaires - Minorant) *Pour tout entier $N \geq 3$, il existe un graphe planaire G d'ordre N, tel que $|\bar{V}(G)| \geq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.*

Pour tout graphe G, la *maille* de G, notée g, est la longueur d'un plus petit cycle sans corde dans G.

Proposition 8 (Planaires de maille g - Majorant) *Pour tout graphe planaire G d'ordre N et de maille g :*

(1) Si $g \geq 5$, alors $|\bar{V}(G)| \leq \frac{N}{2}$.

(2) Si $g \geq 7$, alors $|\bar{V}(G)| \leq \frac{N}{3}$.

Preuve : On sait que pour tout graphe planaire G de maille $g \geq 5$, alors $a(G) \leq 4$, et que pour tout graphe planaire de maille $g \geq 7$, alors $a(G) \leq 3$ [BKW99]. Le résultat est alors immédiat par application du Lemme 1. □

Proposition 9 (Planaires de maille g - Minorant) *Pour tout $N \geq 12$, il existe un graphe planaire G :*

(1) de maille $g = 5$ et d'ordre N tel que $|\bar{V}(G)| \geq \frac{3N}{10} - 2$.

(2) de maille $g = 7$ et d'ordre N tel que $|\bar{V}(G)| \geq \frac{N}{6} - 1$.

Un graphe *planaire extérieur* G est un graphe qui peut être dessiné dans le plan de telle manière qu'il soit planaire, et que tous ses sommets apparaissent sur une même face.

Proposition 10 (Planaires Extérieurs - Majorant) *Pour tout graphe planaire extérieur G d'ordre N,* $|\overline{V}(G)| \le \frac{N}{3}$.

Preuve : Le fait que pour tout graphe planaire extérieur G, $a(G) \le 3$ est un résultat bien connu en coloration de graphes (cf. par exemple [Sop97]). Le résultat de la Proposition 10 ci-dessus en découle directement, via application du Lemme 1. □

Proposition 11 (Planaires Extérieurs - Minorant) *Pour tout entier* $N \ge 3$*, il existe un graphe planaire extérieur G d'ordre N tel que* $|\overline{V}(G)| = \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$.

Preuve : Si l'on reprend le graphe de la preuve de la Proposition 3, on peut s'apercevoir que c'est un graphe planaire extérieur, et on en conclut directement que $|\overline{V}(G)| = \lfloor \frac{N}{3} \rfloor$. □

Un graphe G est dit *1-planaire* si il peut être dessiné dans le plan de telle manière que chaque arête intersecte au plus une autre arête.

Proposition 12 (1-Planaires - Majorant) *Pour tout graphe 1-planaire G d'ordre N,* $|\overline{V}(G)| \le \frac{9N}{10}$.

Preuve : Par application du Lemme 1, sachant que pour tout graphe 1-planaire G, $a(G) \le 20$ (cf. [BKRS01]). □

Proposition 13 (1-Planaires - Minorant) *Pour tout entier* $N \ge 8$*, il existe un graphe 1-planaire G d'ordre N tel que* $|\overline{V}(G)| \ge \frac{5N}{8} - 2$.

3.3 k-Arbres

Nous donnons ci-après la définition d'un k-arbre : (i) Une clique à k sommets est un k-arbre et (ii) Si $T = (V,E)$ est un k-arbre, si C est une clique de T à k sommets et si $x \notin V$, alors $T' = (V \cup \{x\}, E \cup \{(c,x) : c \in C\})$ est un k-arbre.

Les 1-arbres sont les arbres (graphes connexes sans cycle), et les graphes planaires extérieurs sont des 2-arbres partiels.

Observation 1 *Pour tout k-arbre* G_k *d'ordre* $N \ge k+1$, $a(G_k) = k+1$.

Preuve : Par définition d'un k-arbre G_k, on sait qu'au moins $k+1$ couleurs sont nécessaires pour colorier de manière acyclique tout k-arbre G_k d'ordre $N \ge k+1$, puisque le graphe complet à $k+1$ sommets K_{k+1} est un sous-graphe de G_k. De plus, il est possible de démontrer que $a(G_k) \le k+1$ pour tout $k \ge 1$ en appliquant la coloration suivante : d'abord, on colorie les sommets de K_k avec k couleurs différentes deux à deux. Chaque fois qu'un nouveau sommet u est rajouté au k-arbre (avec les arêtes (u,u_i), où u_i, $1 \le i \le k$ sont les sommets d'un graphe complet K_k), on utilise la seule couleur parmi $1,2\dots k+1$ qui n'est affectée à aucun des u_i. Cette coloration est propre (deux sommets voisins n'ont pas la même couleur), et elle est aussi acyclique. En effet, aucun cycle bicolorié ne peut contenir u, puisque pour toute paire u_p, u_q de voisins de u, u_p et u_q ont des couleurs différentes. Donc, pour tout k-arbre G_k, $a(G_k) \le k+1$. □

Grâce à l'observation ci-dessus, et par application du Lemme 1, on obtient le résultat suivant.

Proposition 14 (k-Arbres - Majorant) *Pour tout k-arbre* G_k *d'ordre N,* $|\overline{V}(G_k)| \le \frac{k-1}{k+1} \cdot N$.

Proposition 15 (k-Arbres - Minorant) *Pour tout entier* $k \ge 2$ *donné et tout* $N \ge k+1$*, il existe un k-arbre* G_k *d'ordre N tel que* $|\overline{V}(G_k)| \ge \frac{k-1}{k+1} \cdot N - 2$.

Le Tableau 1 résume les résultats présentés ci-avant, et donne également quelques cas particuliers qu'il est facile de démontrer. Les nombres apparaissant dans la colonne “Ratio” donnent le ratio multiplicatif existant entre le minorant et le majorant. Lorsqu'il vaut 1 (c'est-à-dire lorsque le résultat est optimal), le résultat est indiqué en gras.

		$C(\mathcal{T},\frac{5}{3})$		**Ratio**
Topologie $\mathcal{T}$	Nombre de sommets	Minorant	Majorant	
Interconnexion Totale K_N	N	$N-2$		**1**
R´eseaux k-partis complets $K_{n_1,n_2,\ldots n_k}$	$\sum_{i=1}^{k} n_i$	$\sum_{i=1}^{k} n_i - \max(n_i) - 1$		**1**
Degr´e Maximum 3	N	$\frac{N}{3}$(Prop. 3)	$\frac{N}{2}$(Prop. 2)	1.5
Degr´e Maximum 4	N	$2\cdot\left\lfloor\frac{N}{4}\right\rfloor$(Prop. 5)	$\frac{3N}{5}$(Prop. 4)	1.2
Planaires	N	$\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor$(Prop. 7)	$\frac{3N}{5}$(Prop. 6)	1.2
Planaires de maille $=5,6$	N	$\frac{3N}{10}-2$ (Prop. 1)	$\frac{N}{2}$ (Prop. 1)	1.67
Planaires de maille ≥ 7	N	$\frac{N}{6}-1$ (Prop. 2)	$\frac{N}{3}$ (Prop. 2)	2
1-Planaires	N	$\frac{5N}{8}-2$ (Prop. 13)	$\frac{9N}{10}$ (Prop. 12)	1.44
Planaires Ext´erieurs	N	$\left\lfloor\frac{N}{3}\right\rfloor$ (Prop. 10 et 11)		**1**
k-Arbres, $k\geq 3$	$N\geq k+1$	$\frac{k-1}{k+1}\cdot N-2$ (Prop. 15)	$\frac{k-1}{k+1}\cdot N$ (Prop. 14)	**1**

Tab. 1: $C(\mathcal{T},\frac{5}{3})$ pour quelques topologies $\mathcal{T}$ données

References

[BBF95] V. Bafna, P. Berman, and T. Fujito. Constant ratio approximations of the weighted feedback vertex set problem for undirected graphs. In *Proc. ISAAC'95, Algorithms and Computation*, volume 1004, pages 142–151, 1995. LNCS, Springer-Verlag, Berlin.

[BBG+97] B. Beauquier, J.-C. Bermond, L. Gargano, P. Hell, S. Perennes, and U. Vaccaro. Graph problems arising from wavelength-routing in all-optical networks. *In Proc. of the 2nd IPPS Workshop on Optics and Computer Science, Geneva*, 1997.

[BKRS01] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, A. Raspaud, and E. Sopena. Acyclic colouring of 1-planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 114(1-3):29–41, 2001.

[BKW99] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Acyclic colourings of planar graphs with large girth. *J. London Math. Soc.*, 60 (2):344–352, 1999.

[Bor79] O.V. Borodin. On acyclic colorings of planar graphs. *Discrete Math.*, 25:211–236, 1979.

[Bur79] M.I. Burstein. Every 4-valent graph has an acyclic 5 coloring (in russian). *Soobšč. Akad. Nauk Gruzin*, SSR 93:21–24, 1979.

[FGR02] G. Fertin, E. Godard, and A. Raspaud. Minimum feedback vertex set and acyclic coloring. *Information Processing Letters*, 2002. A paraître.

[FPR99] P. Festa, P.M. Pardalos, and M.G.C. Resende. Feedback set problems. *Handbook of Combinatorial Optimization, Supplement Vol. A, (Eds: DingZhu Du and Panos M. Pardalos), Kluwer Academic Publishers*, pages 209–258, 1999.

[Grü73] B. Grünbaum. Acyclic colorings of planar graphs. *Israel J. Math.*, 14(3):390–408, 1973.

[KPEJ97] C. Kaklamanis, P. Persiano, T. Erlebach, and K. Jansen. Constrained bipartite edge-coloring with applications to wavelength routing. In *Proc. ICALP'97*, volume 1256, pages 493–504, 1997. LNCS, Springer-Verlag, Berlin.

[RM96] B. Ramamurthy and B. Mukherjee. Wavelength conversion in wdm networking. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 16:1061–1073, 1996.

[Sop97] E. Sopena. The chromatic number of oriented graphs. *Mathematical Notes*, 25:191–205, 1997.

[Tog00] O. Togni. Placement de convertisseurs de longueurs d'ondes dans les r´eseaux optiques. In *2èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques des Télécommunications (AlgoTel 2000)*, pages 35–40. INRIA, 2000.