Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Logique Mathématique pour l'Informatique

Cours 7. Systèmes formels du 1^{er} ordre

7.1. Forme normales.

7.1.1 Forme normale prénexe.

Définition 1. *$\phi \in \mathcal{L}^1$ est sous la* forme normale prénexe (FNP), *si elle est de la forme :*

$$\phi \ = \ Q_1 x_1 ... Q_n x_n \ \ \psi,$$

où $Q_1, ..., Q_n$ sont des quantificateurs et ψ est une formule sans occurrence de quantificateur ($Q_1 x_1 ... Q_n x_n$ est le préfixe de ϕ, *ψ est la* matrice de ϕ*).*

Théorème 1. *Toute formule $\phi \in \mathcal{L}^1$ peut être transformée en FNP équivalente.*

Exemple 1.

$$\begin{array}{ll}
\neg\exists y\ \neg\exists u\ ((\exists x\ F(x,y,z) \rightarrow \forall x\ G(x,y)) \wedge \neg\forall z\ F(z,u,z)) & \equiv \\
\neg\exists y\ \neg\exists u\ ((\neg\exists x\ F(x,y,z) \vee \forall x\ G(x,y)) \wedge \neg\forall z\ F(z,u,z)) & \equiv \\
\forall y\ \exists u\ ((\forall x\ \neg F(x,y,z) \vee \forall x\ G(x,y)) \wedge \exists z\ \neg F(z,u,z)) & \equiv \\
\forall y\ \exists u\ ((\forall x\ \neg F(x,y,z) \vee \forall w\ G(w,y)) \wedge \exists z\ \neg F(z,u,z)) & \equiv \\
\forall y\ \exists u\ (\forall w\ \forall x\ (\neg F(x,y,z) \vee G(w,y)) \wedge \exists z\ \neg F(z,u,z)) & \equiv \\
\forall y\ \exists u\ \forall w\ \forall x\ ((\neg F(x,y,z) \vee G(w,y)) \wedge \exists z\ \neg F(z,u,z)) & \equiv \\
\forall y\ \exists u\ \forall w\ \forall x\ ((\neg F(x,y,z) \vee G(w,y)) \wedge \exists v\ \neg F(v,u,v)) & \equiv \\
\forall y\ \exists u\ \forall w\ \forall x\ \exists v\ ((\neg F(x,y,z) \vee G(w,y)) \wedge \neg F(v,u,v)). &
\end{array}$$

Corollaire 1. *Toute $\phi \in \mathcal{L}^1$ peut être transformée en FNP équivalente avec la matrice sous la FNC.*

Corollaire 2. *Toute $\phi \in \mathcal{L}^1$ peut être transformée en une* **proposition** *du 1^{er} ordre en FNP faiblement équivalente dont la matrice est sous la FNC.*

7.1.2 Forme normale clausale.

Définition 2. *Une formule $\phi \in \mathcal{L}^1$ est en* forme normale littérale *si dans cette formule $\neg$ s'applique qu'aux atomes, et il n'y a pas de $\rightarrow$, ni de $\leftrightarrow$.*

Un ensemble de clauses du premier ordre Γ est une forme normale clausale *de ϕ si $\phi \Leftrightarrow \Gamma$.*

Exemple 2. *1.* $\neg\exists x\ (p(x)\ \vee \neg(q(x) \to \exists x\ q(x))) \equiv \forall x\ (\neg p(x)\ \wedge (\neg q(x) \vee \exists x\ q(x))) \equiv \forall x\ (\neg p(x)\ \wedge (\neg q(x) \vee \exists y\ q(y)))$ *(forme littérale).*
2. $\forall y \forall z(\neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z) \wedge q(y)) \Leftrightarrow \neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z) \wedge q(y)$ *(élimination de* $\forall$*)*
$\equiv\ (\neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z)) \wedge (\neg\, r(z) \vee q(y))$ *(FNC)*
$\Leftrightarrow\ \{\neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z),\ \neg\, r(z) \vee q(y)\}$ *(forme clausale).*

7.2 Skolémisation.

SKOLEMISATION est une méthode qui permet d'éliminer les quantificateurs existentiels et obtenir une formule équivalente dans un sens très faible à la formule d'origine. La méthode s'applique aux formules en forme littérale.

Définition 3. *Deux ensembles de formules* Γ_1, Γ_2 *sont* equi-cohérents *(notation* $\Gamma_1 \equiv_{ec} \Gamma_2$*), si* Γ_1 *est cohérent ssi* Γ_2 *l'est aussi (c.-à.-d.,* Γ_1 *a un modèle ssi* Γ_2 *a un modèle).*

Lemme 1. *[Skolem] Soit* $\phi[\exists x\ \psi]$ *l'occurrence la plus à gauche du quantificateur* $\exists$ *dans* ϕ*. Soit* $\forall x_1, ..., \forall x_n$ $(n \geq 0)$ *tous les quantificateurs universels dans la portée desquels se trouve* $\exists x\ \psi$*. Posons*

$$\eta \mathrel{\hat{=}} \phi[\exists x\ \psi \setminus \psi(x \setminus f_c(x_1, ..., x_n))],$$

où f_c/n *est un nouveau foncteur (une nouvelle constante* $f_c/0$*, si* $n = 0$*). Alors,* $\phi \equiv_{ec} \eta$*.*

Ce lemme permet transformer les ensembles finis des formules en des ensembles de clauses équi-cohérents, la transformation étant implémentée par la procédure suivante :

$Skolem(\Gamma \subset \mathcal{L}^1\ :\ fini)$:
  <u>pour toute</u> $\phi \in \Gamma$
    <u>appliquer</u> $skolem(\phi)$ - - indépendamment
  <u>fin</u> ;
  <u>pour toute</u> $\psi \in \Gamma$
    supprimer les quantificateurs universels dans ψ ;
    $\psi\ :=\ FNC(\psi)$; - - transformation en FNC
    décomposer ψ en clauses C_ψ ;
    $Skolem\ :=\ Skolem\ \cup\ C_\psi$;
  <u>fin</u>

$skolem(\phi \in \mathcal{L}^1)$:
  $\phi\ :=\ \overline{\forall}\phi$; - - fermeture universelle
  transformer ϕ en forme littérale ;
  <u>tant qu'il y a</u> des occurrences de $\exists$ dans ϕ
    dégager dans ϕ la première occurrence $[\exists x\ \psi]$ de gauche ;
    <u>si</u> ($[\exists x\ \psi]$ se trouve dans la portée des quantificateurs $\forall y_1, ..., \forall y_n$)
    <u>alors</u> $\phi\ :=\ \phi[\exists x\ \psi \setminus \psi(x \setminus f_c(x_1, ..., x_n))]$
    <u>sinon</u> $\phi\ :=\ \phi[\exists x\ \psi \setminus \psi(x \setminus f_c)]$
    <u>fin_si</u>
    <u>fin_tant_que</u> ;

Lemme 2. $Skolem(\Gamma) \equiv_{ec} \Gamma$ *pour tout ensemble fini* $\Gamma \subset \mathcal{L}^1$*.*

Définition 4. *Un ensemble fini* $\mathcal{C}$ *de clauses du* 1^{er} *ordre est une* forme normale clausale *d'un ensemble de formules* Γ*, si* $\mathcal{C} \equiv_{ec} \Gamma$.

Le lemme 2 implique :

G. Principe de skolémisation.

Théorème 2. *Tout ensemble fini* Γ *de formules du* 1^{er} *ordre peut être transformé en sa forme normale clausale* $Skolem(\Gamma) \equiv_{ec} \Gamma$.

Exemple 3. *La formule* $\phi = r(z) \to \exists x\ (p(x,y,z) \wedge q(y))$ *est transformée en sa forme normale clausale* $Skolem(\phi)$ *comme suit :*

$$\begin{array}{lll}
\phi & \Leftrightarrow \forall y\ \forall z\ (r(z) \to \exists x\ (p(x,y,z) \wedge q(y))) & \text{– (} \overline{\forall} \text{)} \\
 & \equiv \forall y\ \forall z\ (\neg\, r(z) \vee \exists x\ (p(x,y,z) \wedge q(y))) & \text{– (forme littérale)} \\
 & \equiv_{ec} \forall y\ \forall z\ (\neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z) \wedge q(y)) & \text{– (skolémisation)} \\
 & \Leftrightarrow \neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z) \wedge q(y) & \text{– (élimination de } \forall \text{)} \\
 & \equiv (\neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z)) \wedge (\neg\, r(z) \vee q(y)) & \text{– (FNC)} \\
 & \Leftrightarrow \{\ \neg\, r(z) \vee p(f(y,z),y,z),\ \neg\, r(z) \vee q(y)\} & \text{– (forme clausale).}
\end{array}$$

H. Principe de cohérence pour les propositions

Théorème 3. *Quel que soient un ensemble* Γ *de propositions et une proposition* ϕ *du premier ordre :*
H. $\Gamma \models \phi$ *ssi l'ensemble* $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ *est non cohérent (n'a pas de modèle).*

7.3. Modèles d'Herbrand.

Ces modèles représentent les calculs symboliques de fonctions et de relations.

On peut supposer sans perte de généralité que toute signature fonctionnelle Σ_f a un ensemble non vide de constantes $\Sigma_c \subseteq \Sigma_f$ (sinon on prend $\Sigma_c =_{df} \{c/0\}$, c étant une nouvelle constante). On fixe pour Σ_f le *domaine d'Herbrand* $H_{\Sigma_f} =_{df} T_{\Sigma_f}$ (l'ensemble des termes fermés ($\equiv$ *clos*)). Ces termes représentent les valeurs symboliques.

Exemple 4. *Soit la signature* $\Sigma_f = \{a/0, f/1\}$*. Alors* $H_{\Sigma_f} = \{a, f(a), f(f(a)), ...\}$*. Soit la formule* $\exists x\ (p(x) \to q(x, f(x)))$*. Alors* $H_{\Sigma_f} = \{c, f(c), f(f(c)), ...\}$.

Définition 5. *Soit une signature* $\Sigma = (\Sigma_p, \Sigma_f)$*. Son interprétation* I_H *est une interprétation d'Herbrand si* H_{Σ_f} *lui sert de domaine et si les foncteurs sont interprétés comme fonctions symboliques :*

$$f(t_1, ..., t_n)^{I_H} =_{df} f(t_1^{I_H}, ..., t_n^{I_H}).$$

Ainsi, pour un atome clos $A \in H_{\Sigma_f}$*,* $I_H \models A$ *ssi* $A \in I_H$.

Exemple 5. *Soit la formule* $\phi = \forall x\ (p(x) \to p(f(x)))$ *et une interprétation d'Herbrand* I_H*, où* $p(c)^{I_H} = p(f(c))^{I_H} = ... = p(f^9(c))^{I_H} = 0, p(f^{10}(c))^{I_H} = 1$*. Alors* $I_H \models p(f^i(c))$*, pour tout* $i \geq 10$*. C.-à-d.,* $\{p(f^i(c)) \mid i \geq 10\} \models \phi$ *(est son modèle d'Herbrand).*

Définition 6. *Une proposition du 1^{er} ordre est universelle si elle est en forme prénexe et si les quantificateurs qui apparaissent dans son préfixe sont tous universels. Nous allons la dénoter* $\bar{\forall}\ \phi$ *quand* ϕ *est sa matrice.*

Par exemple, toute clause du 1^{er} ordre est une proposition universelle.

L'importance des modèles d'Herbrand provient du théorème suivant dû à Herbrand.

Théorème 4. *[Herbrand] Un ensemble de propositions universelles est cohérent ssi il a un modèle d'Herbrand.*

Idée de preuve : Soit $clos(\Gamma) = \{\theta(\phi) | \phi \in \Gamma,\ \theta\ une\ substitution\ sur\ le\ domaine\ d'Herbrand\}$.
Alors, les énoncés suivants sont équivalents :
(i) Γ cohérent ;
(ii) $H \models \Gamma$ pour un modèle d'Herbrand H ;
(iii) $clos(\Gamma)$ est cohérent.
De plus, dans les modèles d'Herbrand au lieu des afféctations arbitraires de valeurs aux variables nous avons des substitutions de termes.

Corollaire 3. *Soit une proposition universelle* $\bar{\forall}\ \phi$ *et une substitution* θ *(pas forcement fermée). Alors,* $\bar{\forall}\ \phi \models \bar{\forall}\ \phi\theta$.

Pour vérifier l'équi-cohérence et la conséquence, on peut se limiter aux modèles d'Herbrand :

Corollaire 4. *Un ensemble de formules* Γ *est cohérent ssi sa FN clausale* $cl(\Gamma)$ *a un modèle d'Herbrand.*

Corollaire 5. *Soient* Γ_1, Γ_2 *deux ensembles de propositions universelles. Alors,* $\Gamma_1 \models \Gamma_2$ *ssi* $H \models \Gamma_1$ *implique* $H \models \Gamma_2$, *pour tout modèle d'Herbrand* H *(notation* $\Gamma_1 \models_h \Gamma_2$ *).*

7.4. Extension de la méthode des tableaux aux propositions du premier ordre

Soit U un ensemble infini de nouvelles variables : $U \cap Var = \emptyset$.

Extension de la classification de formules :

$\forall$-formules $< \forall x\ \psi >$	Formules dérivées
$\forall x\ \phi$	$\phi(x \backslash X)$
$\neg\exists x\ \phi$	$\neg\phi(x \backslash X)$

$X \in U$ étant une nouvelle variable.

$\exists$-formules $< \exists x\ \psi >$	Formules dérivées
$\exists x\ \phi$	$\phi(x \backslash f(X_1, ..., X_n))$
$\neg\forall x\ \phi$	$\neg\phi(x \backslash f(X_1, ..., X_n))$

$X_1, ..., X_n \in U$ étant les variables introduites dans la $\exists$-formule avant son développement, f étant un nouveau foncteur (une constante si $n = 0$).

Nouvelles règles d'extension d'une branche :

$\forall$-extension : $\dfrac{\{\mathcal{T}', [\ \mathcal{B}',\ < \forall x\ \phi >\ ]\}}{\{\mathcal{T}', [\ \mathcal{B}',\ < \forall x\ \phi >,\ \phi(x \backslash X)\ ]\}}$

($X \in U$ étant nouvelle par rapport à $\mathcal{B}'$).

∃-extension : $\dfrac{\{\mathcal{T}', [\ \mathcal{B}',\ <\exists x\ \phi>\ ]\}}{\{\mathcal{T}', [\ \mathcal{B}',\ <\exists x\ \phi>,\ \phi(x \backslash f(X_1, ..., X_n))\ ]\}}$

($X_1, ..., X_n$ étant toutes les U-variables **dans** ϕ).

Nouvelle règle de fermeture d'une branche :

Une branche $\mathcal{B} = [\ \phi_1, ..., \phi_n\ ]$ est *fermée par un unificateur* $\sigma : (Var \cup U) \rightarrow T_\Sigma[Var \cup U]$, si $\phi_j\sigma = \phi_i\sigma$ pour deux **littéraux** ϕ_j et $\neg\phi_i$ et $1 \leq i, j \leq n$, dans $\mathcal{B}$. *Un tableau est fermé* si toutes ses branches sont fermées par **un même** unificateur.

La méthode des tableaux du 1^{er} ordre : Soit un ensemble Γ de propositions et une proposition ϕ du premier ordre

Pour prouver $\Gamma \vdash_t \phi$:
(1) Créer le tableau initial : $\mathcal{T}_0 = \{[\Gamma, \neg\phi]\}$ **toute variable libre étant remplacée par une variable** $X_i \in U$.
(2) Etablir une preuve $\mathcal{T}_0 \rightarrow_t ... \rightarrow_t \mathcal{T}_n$, dont chaque pas $\mathcal{T}_{n-1} \rightarrow_t \mathcal{T}_n$ est
- soit une extension d'une branche $\mathcal{B} \in \mathcal{T}_{n-1}$ par une $\wedge$-formule, ou $\forall$-formule, ou $\exists$-formule,
- soit une ramification d'une branche $\mathcal{B} \in \mathcal{T}_{n-1}$ par une $\vee$-formule.
(3) $\Gamma \vdash_t \phi$, si le dernier tableau $\mathcal{T}_n$ de cette preuve est fermé.

Exemple 6. $\exists w \forall x\ R(x, w, g(x, w)) \ \vdash_t\ \exists w \forall x \exists y\ R(x, w, y)$
1. $\exists w \forall x\ R(x, w, g(x, w))$ [Γ]
2. $\neg\exists w \forall x \exists y\ R(x, w, y)$ [$\neg\phi$]
3. $\forall x\ R(x, c_0, g(x, c_0))$ [$\exists : 1/c_0$]
4. $\neg\forall x \exists y\ R(x, X_1, y)$ [$\forall : 2/X_1$]
5. $R(X_2, c_0, g(X_2, c_0))$ [$\forall : 3/X_2$]
6. $\neg\exists y\ R(f_1(X_1), X_1, y)$ [$\exists : 4/f_1(X_1)$]
- - *X_1 appartenant à la formule 4*
7. $\neg R(f_1(X_1), X_1, X_3)$ [$\forall : 6/X_3$]

Cette branche est fermée par l'unificateur

$$\sigma(X_1) = c_0, \quad \sigma(X_2) = f_1(c_0), \quad \sigma(X_3) = g(f_1(c_0), c_0)$$

de 5 et 7, ce qui ferme le tableau.

Exemple 7. $\exists x \forall y\ p(x, y) \ \vdash_t\ \forall x \exists y\ p(y, x)$
1. $\exists x \forall y\ p(x, y)$ [Γ]
2. $\neg\forall x \exists y\ p(y, x)$ [$\neg\phi$]
3. $\forall y\ p(c_0, y)$ [$\exists : 1/c_0$]
4. $p(c_0, X_1)$ [$\forall : 3/X_1$]
5. $\neg\exists y\ p(y, c_1)$ [$\exists : 2/c_1$]
- - *aucune U-variable dans 2*
6. $\neg p(X_2, c_1)$ [$\forall : 5/X_2$]

La branche et le tableau sont fermés par l'unificateur

$$\sigma_1(X_1) = c_1, \quad \sigma_1(X_2) = c_0.$$

Théorème 5. *Soit* $\mathcal{T}_1 \to_t \mathcal{T}_2$ *par l'application d'une règle* r *à une branche de* $\mathcal{T}_1$. *Alors,*
(i) s'il existe un modèle $M_1 \models \mathcal{T}_1$, *il en existe aussi pour* $\mathcal{T}_2$: $M_2 \models \mathcal{T}_2$,
(ii) $\mathcal{T}_1 \equiv_{ec} \mathcal{T}_2$.

Corollary 1. *(Correction). Si* $\Gamma \vdash_t \phi$, *alors* $\Gamma \models \phi$.

7.5. Extension de la méthode de résolution

La résolution du 1^{er} ordre s'applique aux ensembles de clauses du 1^{er} ordre. Un tel ensemble Γ_1 étant donné, la règle étendue de résolution qu'on peut lui appliquer est la suivante.

Règle de résolution du 1^{er} ordre : $\Gamma_1 \to_r \Gamma_2$ si

$$\Gamma_1 = \Gamma \cup \{Cl_1 \vee A_1 \vee ... \vee A_n\} \cup \{Cl_2 \vee \neg B_1 \vee ... \vee \neg B_m\}$$
$$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup (\{Cl_1 \vee Cl_2\})\theta,$$

$A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ étant des atomes $(n, m > 0)$, et θ l'unificateur le plus général de $\{A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m\}$, c.-à-d., $A_1\theta = ... = A_n\theta = B_1\theta = ... = B_m\theta$.

La méthode de résolution du 1^{er} ordre :

Pour prouver $\Gamma \vdash_r \phi$:
(1) Transformer $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ en forme normale clausale Γ_0 équi-cohérente : $\Gamma \cup \{\neg\phi\} \equiv_{ec} \Gamma_0$.
(2) Etablir une preuve $\Gamma_0 \to_r \Gamma_1 \to_r ... \to_r \Gamma_k$, où $\Box \in \Gamma_k$.

Exemple 8. *Prouver* $\forall x\ (p(x) \to \exists y\ q(y)) \vdash_r \exists x\ p(x) \to \exists y\ q(y)$.

(1) Skolémisation :
$\forall x\ (p(x) \to \exists y\ q(y)) \equiv$
$\forall x \exists y\ (\neg p(x) \vee q(y)) \equiv_{ec}$
$\forall x\ (\neg p(x) \vee q(f(x))) \Leftrightarrow$
$\{\neg p(x) \vee q(f(x))\}$.
$\neg(\exists x\ p(x) \to \exists y\ q(y)) \equiv$
$\{\exists x\ p(x), \forall y\ \neg q(y)\} \equiv_{ec}$
$\{p(a), \forall y\ \neg q(y)\} \Leftrightarrow$
$\{p(a), \neg q(y)\}$.

(2) Preuve :
1. $\neg p(x) \vee q(f(x))$
2. $p(a)$
3. $\neg q(y)$
4. $q(f(a))$ $[1, 2]$ $\sigma_1 = \{x \mapsto a\}$
5. $\Box$ $[3, 4]$ $\sigma_2 = \{y \mapsto f(a)\}$

(1') Skolémisation :
$\forall x\ (p(x) \to \exists y\ q(y)) \equiv$
$\forall x\ \neg p(x) \vee \exists y\ q(y) \equiv_{ec}$
$\forall x\ \neg p(x) \vee q(c) \Leftrightarrow$
$\{\neg p(x) \vee q(c)\}$.
$\neg(\exists x\ p(x) \to \exists y\ q(y)) \equiv$
$\{\exists x\ p(x), \forall y\ \neg q(y)\} \equiv_{ec}$
$\{p(a), \forall y\ \neg q(y)\} \Leftrightarrow$
$\{p(a), \neg q(y)\}$.

(2') Preuve :
1. $\neg p(x) \vee q(c)$
2. $p(a)$
3. $\neg q(y)$
4. $q(c)$ $[1, 2]$ $\sigma_1 = \{x \mapsto a\}$
5. $\Box$ $[3, 4]$ $\sigma_2 = \{y \mapsto c\}$

Exemple 9. $\forall x\ (p(x) \to (s(x) \vee q(g(x)))),\ \exists y\ \neg s(g(y)), \forall x\ p(x) \vdash_r \exists y\ q(y)$.
(1) Skolémisation :

$\forall x\ (p(x)\rightarrow(s(x) \vee q(g(x)))) \ \equiv$
$\forall x\ (\neg p(x) \vee s(x) \vee q(g(x))) \ \Leftrightarrow$
$\neg p(x) \vee s(x) \vee q(g(x))$.
$\exists y\ \neg s(g(y)) \ \equiv_{ec}\ \neg s(g(c_0))$.
$\forall x\ p(x) \ \Leftrightarrow\ p(x)$.
$\neg\exists y\ q(y) \ \Leftrightarrow\ \neg q(y)$.

(2) Preuve :
1. $\neg p(x) \vee s(x) \vee q(g(x))$
2. $\neg s(g(c_0))$
3. $p(x)$
4. $\neg q(y)$
5. $s(x) \vee q(g(x))$ $[1,3]$
6. $q(g(g(c_0)))$ $[2,5]$ $\sigma_1 = \{x \mapsto g(c_0)\}$
7. $\square$ $[4,6]$ $\sigma_2 = \{y \mapsto g(g(c_0))\}$

Théorème 6. *Soient deux ensembles de clauses* Γ_1, Γ_2. *Si* $\Gamma_1 \rightarrow_r \Gamma_2$, *alors* $\Gamma_1 \models \Gamma_2$.

Corollaire 6. *(correction) Si* $\Gamma \vdash_r \phi$, *alors* $\Gamma \models \phi$.

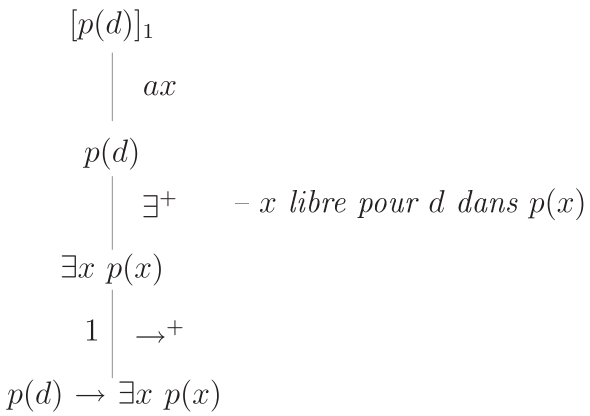
7.6. Extension du calcul naturel

Notation : Pour un ensemble Γ de formules de $\mathcal{L}^1$, $\{\Gamma\}^x$ veut dire que x n'a pas d'occurence libre dans les formules de Γ.

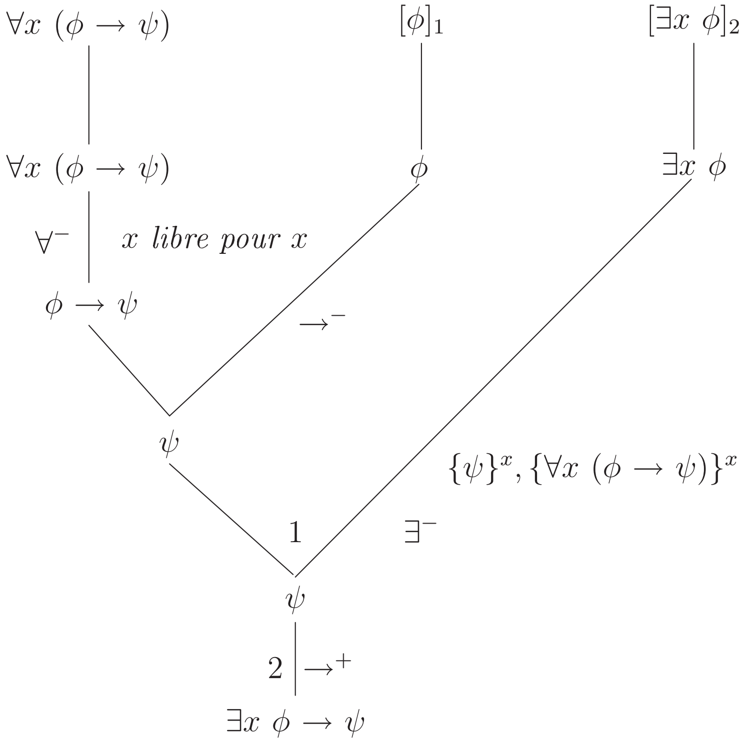
Règles supplémentaires de quantification :

$(\forall^+)\quad \dfrac{\{\Gamma\}^x \ \vdash\ \phi}{\Gamma \vdash \forall x\ \phi}$	$(\forall^-)\quad \dfrac{\Gamma \vdash \forall x\ \phi \quad (x \text{ est libre pour } t \text{ dans } \phi)}{\Gamma \vdash \phi(x\backslash t)}$
$(\exists^+)\quad \dfrac{\Gamma \vdash \phi(x\backslash t) \quad (x \text{ est libre pour } t \text{ dans } \phi)}{\Gamma \vdash \exists x\ \phi}$	$(\exists^-)\quad \dfrac{\Gamma \vdash \exists x\ \phi \qquad \{\Delta\}^x\ [\phi]\ \vdash\ \{\theta\}^x}{\Gamma\Delta\ \vdash\ \theta}$

Exemple 10. *Soit* $d \in \Sigma_f$ *une constante. Alors* $\vdash_N p(d) \rightarrow \exists x\ p(x)$:



Exemple 11. $\forall x\ (\phi \rightarrow \{\psi\}^x)\ \vdash_N\ \exists x\ \phi \rightarrow \psi$



Exemple 12. $\vdash_N\ \forall x\ (\neg\phi \rightarrow \neg\forall x\ \phi)$

$[\forall x\ \phi]_1$

$\forall x\ \phi$

$\forall^-$ *x libre pour x*

ϕ

1 $\rightarrow^+$

$\forall x\ \phi \rightarrow \phi$

contrapos : $\dfrac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$

$\neg\phi \rightarrow \neg\forall x\ \phi$

$\forall^+$ *sans hypothèses*

$\forall x\ (\neg\phi \rightarrow \neg\forall x\ \phi)$

Théorème 7. *(correction) Si* $\Gamma \vdash_N \phi$*, alors* $\Gamma \models \phi$.