Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Logique Mathématique pour l'Informatique

Chapitre II. Logique du premier ordre.

Cours 6. La syntaxe et la sémantique de la logique du premier ordre.

6.1. Insuffisance de la logique propositionnelle.

Pour la montrer, reprenons les exemples du cours 1.

Exemple 1. Syllogisme d'Aristote *(cours 1). Dans cet exemple, le problème est que la conclusion de ce syllogisme n'est pas impliquée par les prémisses 1 et 2. Il faut que la sémantique logique soit suffisamment précise pour le voir.*

Exemple 2. A qui le portrait ? *(cour 1). Dans cet exemple, il nous manque plusieurs choses.*
(i) Il s'avère que les valeurs booléennes des propositions telles comme **être frère** *dépendent des paramètres portant sur les domaines des objets non-booléens (des personnes). Il faut savoir exprimer ces propositions parametrées.*
(ii) Deuxièmement, il faut exprimer le sens des propositions qui utilisent les quantifieurs **quelque soit** x *et* **il existe** x. *Le premier aurait le sens que la proposition paramétrée à laquelle il porte est vraie indépendamment des valeurs des paramètres. Le deuxième aurait le sens que cette proposition est vraie au moins pour une valeur des paramètres. Soit la phrase :*

toute fille dans cette compagnie joyeuse sort avec un garçon

Elle est ambiguë (au moins à l'écrit) :
- *toute fille avec un même garçon ?*
- *chacune avec un garçon à elle ?*

On ne peut pas distinguer entre ces sens différents en logique propositionnelle.

Exemple 3. Analyse des données *(cours 1). Dans cet exemple nous rencontrons encore un domaine : un ensemble fini d'entiers avec les relations binaires* $<, =$. *De plus, dans cet exemple nous utilisons une fonction arr. Cette variété des domaines exige une définition du langage logique indépendamment des domaines spécifiques.*

Exemple 4. Questions / requêtes. *Soit une autre phrase :*

Paule avait un lapin

En logique propositionnelle on ne peut que poser la question : vrai ou faux ?
Et s'il faut demander : ≪Qu'avait Paule ?≫ Ce n'est pas possible dans cette logique.

Ces exemples montrent que pour les exprimer il faut analyser, cette fois, les clauses elles-mêmes.

Niveau intra-phrasal de l'analyse

A ce niveau de l'analyse, la logique convenable est la **logique du premier ordre** : $\mathcal{L}^1$.

Dans toutes les langues on trouve :

1. Les verbes dont les arguments sont les groupes nominaux. Cette structure argumentale est représentée en logique par les *prédicats* :
$\mathbf{sortir}_1(x, y)$: $\ll x$ quitte l'espace de y vers l'exterieur$\gg$
$\mathbf{sortir}_2(x, y)$: $\ll x$ $sort_1$ de chez soi avec y pour se distraire$\gg$
$\mathbf{poser}_1(x, y, z)$: $\ll x$ place y dans la position $z\gg$

2. Les moyens d'expression de la référence dans les groupes nominaux : les articles, les pronoms (démonstraifs, personnels, relatifs, indéfinis), etc. :

6.2. Langage du 1^{er} ordre $\mathcal{L}^1$ (syntaxe).
1. **Symboles.**

Symboles de la *signature* :
Constantes : $0, 1, adam, \grave{e}ve, ...$
Foncteurs : $+, *$.
Prédicats : *aimer*, $<$, $=$. Notation : p/n (prédicat p à n arguments ou de l'**arité** n) : $aimer/2$, $</2$, $=/2$.
Connecteurs : $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\exists$ (**quantificateur existentiel**, $\ll$il y a un$\gg$), $\forall$ (**quantificateur universel**, $\ll$quel que soit$\gg$).

Variables : $X, Y, ...$

2. **Termes** (expressions pour calculer les valeurs).
2.1. **Termes primitifs** : les variables et les constantes.
2.1. **Termes composés** : si $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes, alors $f(t_1, \ldots, t_k)$ est aussi un terme pour tout foncteur f/k.
Exemples : $adam$, X, $x + 3$, $arr(i)$.

3. **Formules**.
3.1. **Formules atomiques, atomes** : $p(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, où p/n est un prédicat et α_i sont des termes, e.g. des constantes ou des variables.

Exemples : $conna\hat{i}tre(adam, \grave{e}ve)$, $(3 - x)/y > 0$, $rouge(X)$, $porche(Y)$.

3.2. **Formules composées avec les connecteurs propositionnels :** $\neg\phi$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \rightarrow \phi_2)$, $(\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)$ sont **formules** de $\mathcal{L}^1$ pour toutes formules ϕ, ϕ_1, ϕ_2.

3.3. **Formules quantifiées :** si ϕ est une formule et X est une variable, alors $\exists X \phi$, $\forall X \phi$ sont **formules** de $\mathcal{L}^1$ (X est *liée* par le quantificateur et ϕ est sa *portée*. Une variable Y non liée est *libre*). Une formule sans variable libre est dite *proposition*.

Exemple 5.
(i) $\psi = (x > 0 \wedge \exists z(x = y + z))$

x, y sont libres, z est liée. $(x = y + z)$ est la portée de $\exists z$ dans ψ.

(ii) $\forall x(x = x)$ est une proposition.

(iii) **Question :** *Soit la formule $\forall y(x = 2 + y \wedge \exists x(x > 4 \wedge x < 2^y))$.*
x, est elle libre ? Et y ?.

Définition 1. *Une variable x est* libre pour un terme t dans une formule ϕ *si aucune occurence libre de x dans ϕ ne se trouve dans la portée d'un quantificateur $(Q\ y)$, où y est une des variables de t.*

Exemple 6.
La variable x dans $\forall y\ (x = 2 + y \wedge \exists x\ (x > 4 \wedge x < 2^y))$ n'est pas libre pour $y + 1$, mais elle est libre pour $u + 1$.

Ce langage est suffisamment expressif pour exprimer tous nos exemples.

Exemples :
$\exists\ X\ connaître(adam, X)$
$\forall\ X\ (acheter(ève, X) \wedge voiture(X) \rightarrow (rouge(X) \vee bleu(X))) \wedge porche(X))$.
$\forall\ F\ \exists\ G\ (fille(F)\ \wedge\ dans(F, comp)\ \wedge\ joyeuse(comp) \rightarrow sortir_2(F, G)\ \wedge\ garçon(G))$
$\forall\ F\ (fille(F)\ \wedge\ dans(F, comp)\ \wedge\ joyeuse(comp) \rightarrow \exists\ G\ (garçon(G)\ \wedge\ sortir_2(F, G)))$
$\exists\ G\ (garçon(G)\ \wedge\ \forall\ F\ (fille(F)\ \wedge\ dans(F, comp)\ \wedge\ joyaux(comp) \rightarrow sortir_2(F, G)))$
En utilisant les termes, on peut représenter les valeurs complexes (structurées, arithmétiques) des exemples 3 et 4 du cours 1 :

L'énoncé de l'exemple 3 :

(1)
$$\begin{gathered}\forall i\ (1 \leq i\ \wedge\ i \leq 4 \rightarrow (arr[i] = 1\ \vee\ arr[i] = 2\ \vee\ arr[i] = 3)) \rightarrow \\ \exists j\ \exists k\ (1 \leq i\ \wedge\ i \leq 4\ \wedge\ \neg(j = k)\ \wedge\ arr[j] = arr[k]).\end{gathered}$$

Remarque. Dans cette formule nous utilisons et les foncteurs et les prédicats.

L'énoncés de l'exemple 2 :

Concepts :

(2)
$$\begin{gathered}\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\neg(x = y) \wedge père(z,\ x) \wedge père(z,\ y) \rightarrow \\ frère(x,\ y) \vee \text{sœur}(x,\ y))\end{gathered}$$

(3)
$$\forall x\ \forall y\ (frère(x,\ y) \rightarrow (frère(y,\ x) \vee \text{sœur}(y,\ x)))$$

(4)
$$\forall x\ \forall y\ ((frère(x,\ y) \rightarrow sexe(x,\ 'm')) \wedge (\text{sœur}(x,\ y) \rightarrow sexe(x,\ 'f')))$$

(5)
$$\forall x\ \forall y\ (fils(x,\ y) \rightarrow sexe(x,\ 'm'))$$

Condition :

(6)
$$\neg\exists y\ (frère(y,\ 'moi') \vee \text{sœur}(y,\ 'moi')).$$

Requête (x requis) :

(7) $$\exists p \; (père(p, \; 'moi') \wedge fils(x, \; p)).$$

Le syllogisme de l'exemple 1 :

(8) $$\forall x \; (baleine(x) \rightarrow habite\_mer(x)).$$

(9) $$\forall x \; (baleine(x) \rightarrow mammifère(x)).$$

(10) $$\exists x \; (mammifère(x) \; \wedge \; habite\_mer(x)).$$

6.3. Language $\mathcal{L}^1$ (sémantique).

Pour interpréter les formules de $\mathcal{L}^1$ il faut choisir un *contexte*, c'est-à-dire
- fixer une *structure* I avec un domaine $\mathcal{D} \neq \emptyset$ sur lequel portent les variables, et où à tous foncteurs f/k (une constante) correspond une fonction à k arguments sur $\mathcal{D}$ (un objet dans $\mathcal{D}$) et à tout prédicat p/n correspond une relation à n places sur $\mathcal{D}$.
- choisir une affectation σ des valeurs aux variables libres.

Exemple 7. *Soit l'énoncé :*

(11) $$\exists x \; (x^2 - y = 0)$$

qui affirme l'existence de solution de l'équation $x^2 - y = 0$. La formule (11) peut être interprétée de plusieurs façons :

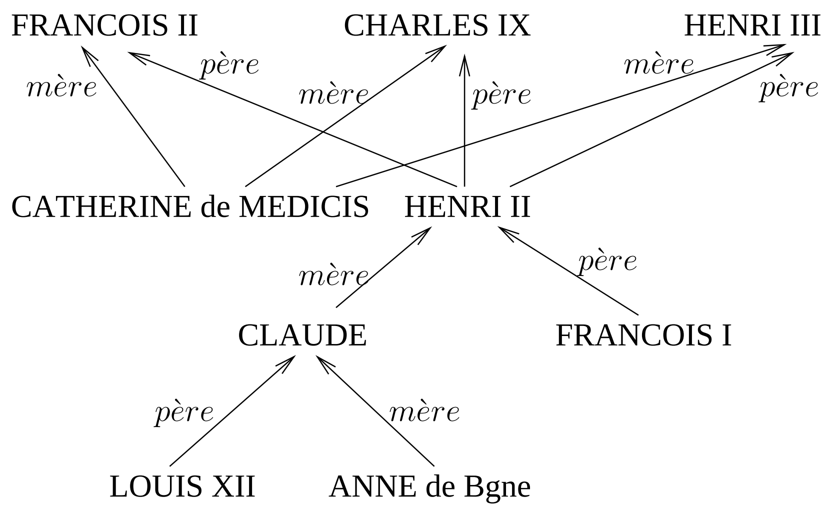
Interprétation I_e *: $\mathcal{D}$: les entiers. Alors,*
pour $y = 2$ il n'y a pas de solution,
pour $y = 0$ il en existe.
Interprétation I_r *: $\mathcal{D}$: les réels. Alors,*
pour $y = 2$ il y a deux solutions.

6.3.1. **Contexte** I, σ :

Interprétation I :

(i) les constantes c correspondent aux objets : $c^I \in D$, (e.g., $ève^{bibl}$: la première femme, 0^{I_e} l'entier non-négatif minimal),
(ii) les prédicats correspondent à des relations sur D (p^I à n arguments pour p/n). $(p(a_1, ..., a_k))^I = 1$ ssi la relation p^I a lieu pour les objets $a_1, ..., a_k \in D$.

Exemple 8. *Extrait de la généalogie des rois de France :*



Interprétation $\ll$*royal*$\gg$

$mère(catherine, charles)^{royal} = 1$ *et* $père(catherine, charles)^{royal} = 0$, *si* $catherine^{royal} = CATHERINE$ *de* $MEDICIS$ *et* $charles^{royal} = CHARLES\ IX$.

Attribution des valeurs σ : $\sigma(X) \in D$ pour toute variable X.

6.3.2. **Vérité des atomes dans un contexte** :

$I, \sigma \models p(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ ($p(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ est vrai dans le contexte I, σ) :

$$I, \sigma \models p(\alpha_1, ..., \alpha_k) \text{ si } p(a_1, ..., a_k)^I = 1,$$

où a_i sont les valeurs des termes α_i dans l'interprétation I quand les variables obtiennent les valeurs à travers l'affectation σ.

Notation : Pour une affectation σ des valeurs aux variables, $\sigma_{x=a}$ est l'affectation telle que $\sigma_{x=a}(y) = \sigma(y)$ pour tous $y \neq x$ et $\sigma_{x=a}(x) = a$.

Exemple 9. *Interprétation arithmétique :*
La formule (11) (voir exemple 7) dans le contexte : I_e *(les entiers),* $\sigma'(y) = (2)^{I_e}$. *Pour* $\sigma'_{x=n}$, $(x^2 - y)^{I_e \sigma'_{x=n}} \neq (0)^{I_e}$. *Ainsi* $(\exists x(x^2 - y = 0))^{I_e \sigma'} = 0$.

La formule (11) dans le contexte : I_r *(réels),* $\sigma''(y) = 2^{I_r}$. *Soit* $\sigma''_{x=\sqrt{2}}$. *Alors,* $(x^2 - y)^{I_r \sigma''_{x=\sqrt{2}}}$. *Ainsi,* $(\exists x(x^2 - y = 0))^{I_r \sigma''} = 1$.

Exemple 10. *Interprétation royale :*

$$royal, \{X = CATHERINE \text{ de } MEDICIS\} \models mère(X, charles),$$

si $charles^{royal} = CHARLES\ IX$, *mais*

$$royal, \{X = CATHERINE \text{ de } MEDICIS\} \not\models mère(X, charles),$$

si $charles^{royal} = CHARLES\ X$.

6.3.3. **Vérité dans un contexte des formules complexes :**

(i) $\phi = \neg\psi$:

$$I, \sigma \models \phi \text{ ssi } I, \sigma \not\models \psi$$

(ii) $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$:

$$I, \sigma \models \phi \text{ ssi } I, \sigma \models \psi_1 \text{ et } I, \sigma \models \psi_2$$

(iii) $\phi = \forall\ X\ \psi$:

$$I, \sigma \models \phi \text{ ssi } I, (\sigma, X = a) \models \psi \text{ pour } \textbf{tout} \text{ objet } a \in D.$$

(iv) $\phi = \exists\ X\ \psi$:

$$I, \sigma \models \phi \text{ ssi } I, (\sigma, X = a) \models \psi \text{ pour } \textbf{un} \text{ objet } a \in D.$$

Exemple 11. *Interprétation arithmétique :*
Interprétation arithmétique I_e :

$$I_e \models \forall\ X\ \exists\ Y\ (Y = X + 1)$$

(il y a un entiers suivant pour tout entier).

$$I_e \models \neg\exists\ X\ \forall\ Y\ (Y < X \vee X = Y)$$

(il n'y a pas d'entier maximal).

Exemple 12. *Interprétation royale :*

$$royal \models \neg\exists\ X\ (m\grave{e}re(catherine, X) \wedge p\grave{e}re(henry2, X) \wedge sexe(X, f)),$$

et

$$royal \models \forall\ X\ (m\grave{e}re(catherine, X) \wedge p\grave{e}re(henry2, X) \rightarrow sexe(X, m)),$$

si $catherine^{royal} = CATHERINE\ de\ MEDICIS$ *et* $henri2^{royal} = HENRY\ II$ *et* $sexe(FRANCOIS\ II, m)^{royal} = sexe(CHARLES\ IX, m)^{royal} = sexe(HENRY\ III, m)^{royal}$.

$$royal, \{X = CATHERINE\ de\ MEDICIS\} \models m\grave{e}re(X, charles),$$

6.4. Classement sémantique de formules.

Définition 2. ϕ satisfaisable *:* $\phi^{I\sigma} = 1$ *dans un contexte* $I\sigma$.
ϕ est une contradiction *:* ϕ *n'est pas satisfaisable.*
ϕ *est une* tautologie *:* $\phi^{I\sigma} = 1$ *dans tout contexte* $I\sigma$.

Exemple 13.
(i) La formule (11) (exemple 7) est satisfaisable ; elle n'est pas une tautologie.
(ii) La formule $\neg\forall x\ \phi \leftrightarrow \exists x\ \neg\phi$ *est une tautologie.*
(iii) La formule $p(x)\ \wedge\ \neg p(x)$ *est une contradiction.*

Remarque. Une proposition ne dépend pas d'une affectation particulière. On a $\phi^{I\sigma_1} = \phi^{I\sigma_2}$, pour tout $I,\ \sigma_1,\ \sigma_2$. Alors, nous allons omettre les affectations quand il s'agit d'une proposition : ϕ^I.

6.5. Conséquences et équivalences.

Définition 3. ϕ *est une* conséquence sémantique *de* Γ *(*$\Gamma \models \phi$*) :* $\phi^{I\sigma} = 1$ *pour tout contexte* $I\sigma$ *où* $\psi^{I\sigma} = 1$*, pour toute formule* $\psi \in \Gamma$.

Exemple 14. $p(x),\ q(x) \models p(x) \wedge q(x)$

Définition 4. I *est un* modèle *de* ϕ *(on note* $I \models \phi$*) :* $\phi^{I\sigma} = 1$ *pour toute affectation* σ *dans* I.

Exemple 15. I_r *(les réels) :* $I_r \models \forall x\ \exists y\ (xy = 1)$ *?*

Définition 5. *ϕ est une* conséquence sémantique faible *de Γ ($\Gamma \Rightarrow \phi$) : tout modèle de Γ est aussi un modèle de ϕ.*

Exemple 16. *$p(x) \Rightarrow \forall x\ p(x)$, mais $p(x) \not\models \forall x\ p(x)$.*

Définition 6. *ϕ et ψ sont* sémantiquement équivalentes *($\phi \equiv \psi$) : $\phi \models \psi$ et $\psi \models \phi$.*
ϕ et ψ sont faiblement équivalentes *($\phi \Leftrightarrow \psi$) : $\phi \Rightarrow \psi$ et $\psi \Rightarrow \phi$.*

Exemple 17. *$\forall x(P \vee Q) \equiv \forall x P \vee Q$, si Q est une proposition.*
$p(x) \Leftrightarrow \forall x\ p(x)$, mais $p(x) \not\equiv \forall x\ p(x)$.

Proposition 1.
(1) $\phi \ \models \ \psi$ ssi $\models \phi \rightarrow \psi$.
(2) $\phi \equiv \psi$ ssi $\models \phi \rightarrow \psi$ et $\models \psi \rightarrow \phi$.
(3) $\phi \Rightarrow \psi$ ssi $\bar{\forall}\phi \models \bar{\forall}\psi$ ($\bar{\forall}\Phi$ étant la fermeture universelle *de Φ : $\forall x_1 ... x_n \Phi(x_1 ... x_n)$).*
(4) $\phi \Leftrightarrow \psi$ ssi $\bar{\forall}\phi \equiv \bar{\forall}\psi$.
(5) $\phi \models \psi$ implique $\phi \Rightarrow \psi$.
(6) $\forall x\ \phi \equiv \forall y \phi(x \backslash y)$. $\phi(x \backslash y)$: renommage des occurrences liées de x dans ϕ par y.

6.6. Substitutions propositionnelles : un lien entre $\mathcal{L}^p$ et $\mathcal{L}^1$.

Définition 7. *Soit V un ensemble infini de lettres propositionnelles et θ une fonction : $V \rightarrow \mathcal{L}^1$ telle que chaque formule $\theta(A)$, $A \in V$, est une* proposition *de $\mathcal{L}^1$ (c'est-à-dire n'a pas d'occurences de variables libres). Une telle fonction s'appelle* substitution propositionnelle (SUP). *θ s'étend sur $\mathcal{L}^p$:*

$$\begin{cases} \theta(\neg\phi) & = & \neg\theta(\phi) \\ \theta(\phi_1 \ @ \ \phi_2) & = & \theta(\phi_1) @ \ \theta(\phi_2), \quad pour \quad @ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}. \end{cases}$$

A. Principe de substitution propositionnelle

Théorème 1.
(i) $\phi \in \mathcal{L}^p$ est une tautologie ssi $\theta(\phi) \in \mathcal{L}^1$ est une tautologie pour toute SUP θ.
(ii) $\phi \in \mathcal{L}^p$ est une contradiction ssi $\theta(\phi) \in \mathcal{L}^1$ est une contradiction pour toute SUP θ.
(iii) $\phi \in \mathcal{L}^p$ est satisfaisable ssi il existe une SUP θ telle que $\theta(\phi)$ est satisfaisable.

Exemple 18. *$\phi = A \rightarrow (B \rightarrow A \ \wedge \ B)$ est une tautologie de $\mathcal{L}^p$.*
Pour la SUP :

$$\begin{cases} \theta(A) & = & p(c) \wedge \neg\exists x\ p(x), \\ \theta(B) & = & \neg p(c), \end{cases}$$

la formule :

$$\theta(\phi) = p(c) \wedge \neg\exists x\ p(x) \rightarrow (\neg p(c) \rightarrow p(c) \wedge \neg\exists x\ p(x) \wedge \neg p(c))$$

est une tautologie du 1^{er} ordre.

6.7. Principes de quantification.

B. Principe de permutation de quantificateurs

Théorème 2.
$B1.\ \ \models \forall x\ \forall y\ Q(x,y,\bar{z}) \leftrightarrow \forall y\ \forall x\ Q(x,y,\bar{z})$
$B2.\ \ \models \exists x\ \exists y\ Q(x,y,\bar{z}) \leftrightarrow \exists y\ \exists x\ Q(x,y,\bar{z})$
($\bar{z}$ étant une liste de variables libres).

Remarque. On peut mettre ces tautologies sous la forme d'équivalences. Par exemple,

$$B1.\ \ \forall x\ \forall y\ Q(x,y,\bar{z})\ \equiv\ \forall y\ \forall x\ Q(x,y,\bar{z})$$

C. Principe de quantificateurs duaux

Théorème 3.
$C1.\ \ \neg\forall x\ Q(x,\bar{z})\ \equiv\ \exists x\ \neg Q(x,\bar{z})$
$C2.\ \ \neg\exists x\ Q(x,\bar{z})\ \equiv\ \forall x\ \neg Q(x,\bar{z})$

D. Principe de portée.

Théorème 4. *Pour toute formule $Q(x,\bar{z})$ et toute formule $P(\bar{y})$ qui n'a pas d'occurence de x libre, on a :*
$D1.\ \ P(\bar{y}) \wedge \forall x\ Q(x,\bar{z})\ \equiv\ \forall x\ (P(\bar{y}) \wedge Q(x,\bar{z}))$
$D2.\ \ P(\bar{y}) \vee \forall x\ Q(x,\bar{z})\ \equiv\ \forall x\ (P(\bar{y}) \vee Q(x,\bar{z}))$
$D3.\ \ P(\bar{y}) \wedge \exists x\ Q(x,\bar{z})\ \equiv\ \exists x\ (P(\bar{y}) \wedge Q(x,\bar{z}))$
$D4.\ \ P(\bar{y}) \vee \exists x\ Q(x,\bar{z})\ \equiv\ \exists x\ (P(\bar{y}) \vee Q(x,\bar{z}))$.
Pour toutes formules P, Q, on a :
$D5.\ \ \forall x\ (P \wedge Q)\ \equiv\ \forall y\ P \wedge \forall z\ Q$
$D6.\ \ \exists x\ (P \vee Q)\ \equiv\ \exists y\ P \vee \exists z\ Q$.

Corollaire 1. *On peut renommer les variables liées :*
$D7.\ \ \models \forall x\ Q(x,\bar{z}) \leftrightarrow \forall y\ Q(y,\bar{z})$
$D8.\ \ \models \exists x\ Q(x,\bar{z}) \leftrightarrow \exists y\ Q(y,\bar{z})$.

6.8. Transformation par remplacement de sous-formules.

E. Principe de transformation équivalente

Théorème 5.

$$\frac{\phi_1\ \equiv\ \phi_2}{\psi[\phi_1]\ \equiv\ \psi[\phi_1 \backslash \phi_2]}$$

Exemple 19.
$\exists x\ \neg(q(x) \to (\forall z\ p(z) \wedge \neg q(x)))\ \equiv$ *(par $\neg(P \to Q)\ \equiv\ P \wedge \neg Q$, et puis par A et E)*

$\exists x\ (q(x) \wedge \neg(\forall z\ p(z) \wedge \neg q(x)))$	$\equiv$	*(par $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$, A et E)*
$\exists x\ (q(x) \wedge (\neg\forall z\ p(z) \vee \neg\neg q(x)))$	$\equiv$	*(par $\neg\neg P \equiv P$, A et E)*
$\exists x\ (q(x) \wedge (\neg\forall z\ p(z) \vee q(x)))$	$\equiv$	*(par $C1$ et E)*
$\exists x\ (q(x) \wedge (\exists z\ \neg p(z) \vee q(x)))$	$\equiv$	*(par $D4$, $D3$ et E)*
$\exists x\ \exists z\ (q(x) \wedge (\neg p(z) \vee q(x)))$.		

6.9. Transformation par remplacement de termes.

F. Principe de substitution de termes

Théorème 6. *Soit x libre pour un terme t dans $\phi(x, \bar{y})$. Alors*
$F1$. $\forall x\ \phi(x, \bar{y}) \models \phi(x, \bar{y})(x \backslash t)$.
$F2$. $\phi(x, \bar{y})(x \backslash t) \models \exists x\ \phi(x, \bar{y})$.

Exemple 20.
(1) $\forall x\ p(x) \models p(c)$ *(x est libre pour c dans $p(x)$),*
(2) $\forall x\ p(x) \models p(x)$ *(x est libre pour x dans $p(x)$),*
(3) $\forall x\ \exists y\ (x = 2y) \models \exists y\ (x^2 = 2y)$ *(x est libre pour x^2 dans $\exists y\ (x = 2y)$),*
mais attention :
(4) $\forall x\ \exists y\ (x \neq y) \not\models \exists y\ (y \neq y)$ *(x n'est pas libre pour le terme y dans $\exists y\ (x \neq y)$),*
(5) $\forall y\ (y = y) \not\models \exists x\ \forall y\ (x = y)$ *(x n'est pas libre pour le terme y dans $\forall y\ (x = y)$).*