Alexandre DIKOVSKY
Universit de Nantes

Logique Mathématique pour l'Informatique

Cours 5. Théories propositionnelles.

Les théories logiques so t défi ies par des axiomes ou par des modèles.

5.1. Théories axiomatiques.

Exemple 1. *Deux axiomes*

$$\alpha_1 : \; Ment \rightarrow \neg(Ment \vee Dee)$$
$$\alpha_2 : \; \neg Ment \rightarrow (Ment \vee Dee)$$

formalisent le sens du mot mentir *dans le contexte de l'assertion "Je mens aujourd'hui ou je suis Tweedledee".*

Il y a deux façons de dériver les conséquences des axiomes $\mathcal{A}$:

- Théories axiomatiques sémantiques :

$$Th^P(\mathcal{A}) =_{df} \{\phi \in \mathcal{L}^P \;\mid\; \mathcal{A} \models \phi\},$$

- Théories axiomatiques formelles :

Soit u système formel $\vdash_S$ (par exemple : $\vdash_t, \vdash_r, \vdash_N$ ou $\vdash_I$). Alors,

$$Th^P_S(\mathcal{A}) =_{df} \{\phi \in \mathcal{L}^P \;\mid\; \textit{pour un } \Gamma \subseteq \mathcal{A} \textbf{ fini} \;:\; \Gamma \vdash_S \phi\}.$$

Ai si, $Th^P_S(\mathcal{A})$ co tie t les formules *dérivées* da s S à partir d'axiomes de $\mathcal{A}$. O   e co sidère que les systèmes S *corrects* par rapport à la co séque ce logique, c'est-à-dire :

$$\Gamma \vdash_S \phi \text{ implique } \Gamma \models \phi.$$

Ai si S défi it les théories formelles qui co siste t de co séque ces logiques de $\mathcal{A}$:

$$Th^P_S(\mathcal{A}) \subseteq Th^P(\mathcal{A}).$$

Par exemple, $\vdash_t, \vdash_r, \vdash_N$ et $\vdash_I$ so t tous corrects :

$$Th^P_r(\mathcal{A}) \subseteq Th^P(\mathcal{A}), \;\; Th^P_t(\mathcal{A}) \subseteq Th^P(\mathcal{A}), \;\; Th^P_I(\mathcal{A}) \subseteq Th^P(\mathcal{A}), et \;\; Th^P_N(\mathcal{A}) \subseteq Th^P(\mathcal{A}).$$

Exemple 2. *Prouvabilité par tableaux :*

$$\{Ment \rightarrow \neg(Ment \vee Dee),\quad \neg Ment \rightarrow (Ment \vee Dee)\} \ \vdash_t \ Dee$$

garantit

$$\{Ment \rightarrow \neg(Ment \vee Dee),\quad \neg Ment \rightarrow (Ment \vee Dee)\} \models Dee\ .$$

1. $Ment {\rightarrow} \neg(Ment \vee Dee)$

2. $\neg Ment {\rightarrow} (Ment \vee Dee)$

3. $\neg Dee$

- 4. $\neg\neg Ment\ [rm : 2]$
  - 6. $\neg Ment\ [rm : 1]$ $\square$
  - 7. $\neg(Ment \vee Dee)\ [rm : 1]$
    - 8. $\neg Ment\ [ex : 7]$
    - 9. $\neg Dee\ [ex : 7]$ $\square$
- 5. $Ment \vee Dee\ [rm : 2]$
  - 10. $Ment\ [rm : 5]$
    - 12. $\neg Ment\ [rm : 1]$ $\square$
    - 13. $\neg(Ment \vee Dee)\ [rm : 1]$
      - 14. $\neg Ment\ [ex : 13]$
      - 15. $\neg Dee\ [ex : 13]$ $\square$
  - 11. $Dee\ [rm : 5]$ $\square$

Pour les systèmes formels corrects $\vdash_S$, la questio fo dame tale se pose :

Question. S, dérive-t-il **toutes** les co séque ces logiques des axiomes do és ? C'est-à-dire,

$$\Delta \models \phi \text{ implique } \Gamma \vdash_S \phi$$

pour u $\Gamma \subseteq \Delta$ *fini*. Si oui, alors S et dit *complet* :

Définition 1. *Un système formel correct S est complét si $Th^P(\mathcal{A}) = Th^P_S(\mathcal{A})$.*

Alors, pour les systèmes formels complets, les deux faço s de défi ir les théories axiomatiques so t équivale tes. Nous allo s prouver cette équivale ce au moi s pour le calcul aturel. Par ailleurs, la complétude 'a pas lieu pour le calcul i tuitio iste :

$$(p \vee \neg p), (\neg\neg p {\rightarrow} p) \in Th^P(\emptyset) - Th^P_I(\emptyset),$$

5.2. Théories des modèles.

Définition 2. *La théorie d'un ensemble d'interprétations $\mathcal{M}$ est définie comme :*

$$Tm^P(\mathcal{M}) {=_{df}} \{\phi \in \mathcal{L}^P \mid I \models \phi \ \textit{pour}\ \textbf{chaque}\ I \in \mathcal{M}\} = \bigcap_{I \in \mathcal{M}} \{\phi \in \mathcal{L}^P \mid I \models \phi\}.$$

Exemple 3. *Voici les restrictions des interprétations aux lettres propositionnelles des axiomes* α_1, α_2 *:*

	$Ment$	Dee
I_{11}	1	1
I_{10}	1	0
I_{01}	0	1
I_{00}	0	0

On vérifie directement que :

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 \notin Tm^P(I_{11}), & \alpha_2 \in Tm^P(I_{11}) \\ \alpha_1 \notin Tm^P(I_{10}), & \alpha_2 \in Tm^P(I_{10}) \\ \alpha_1 \in Tm^P(I_{01}), & \alpha_2 \in Tm^P(I_{01}) \\ \alpha_1 \in Tm^P(I_{00}), & \alpha_2 \notin Tm^P(I_{00}). \end{array}$$

Cela veut dire que

$$\begin{array}{c} Tm^P(I_{11}) \neq Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\}) \\ Tm^P(I_{10}) \neq Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\}) \\ Tm^P(I_{00}) \neq Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\}) \\ Tm^P(I_{01}) \supseteq Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\}). \end{array}$$

Nous avons montré que $Dee \in Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\})$. *Voici une preuve que* $\neg Ment \in Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\})$ *:*

Exemple 4.

1. $Ment \rightarrow \neg(Ment \vee Dee)$

2. $\neg Ment \rightarrow (Ment \vee Dee)$

3. $\neg\neg Ment$

4. $\neg Ment$ $[rm : 1]$ $\square$ 5. $\neg(Ment \vee Dee)$ $[rm : 1]$

6. $\neg Ment$ $[ex : 5]$

7. $\neg Dee$ $[ex : 5]$

$\square$

On peut en déduire que $Tm^P(I_{01}) = Th_t^P(\{\alpha_1, \alpha_2\})$. *Par exemple, si* $\Gamma \vdash_t \alpha$ *et* $\Gamma \vdash_t \beta$, *alors* $\Gamma \vdash_t \alpha \wedge \beta$. *Cela veut dire que le patron de* I_{01} *est dérivable à partir de* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ *:* $\{\alpha_1, \alpha_2\} \vdash_t \neg Ment \wedge Dee$. *D'un autre côté, si* $\Gamma \vdash_t \alpha$, *alors* $\Gamma \vdash_t \alpha \vee \beta$ *pour toute formule* β. *Ainsi, si une formule* γ *est vraie dans* I_{01} *(donc appartient à* $Tm^P(I_{01})$*), alors au moins sa FND canonique* $FNDC(\gamma) \equiv \neg Ment \wedge Dee \vee \psi$ *est dérivable à partir de* $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Question. Est-ce que toute théorie axiomatique propositio elle peut être défi ie comme u e théorie de modèles et i verseme t ?

La réponse est "OUI".

5.3. Equivalence de conséquences logique et formelle (pour $\vdash_N$).

Définition 3. *Un ensemble de formules $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^P$ est N-cohérent, s'il existe une formule $\phi \notin Th_N(\mathcal{A})$.*

Proposition 1. *Les trois énoncés suivant sont équivalents :*
(i) $\mathcal{A}$ *est N-cohérent,*
(ii) $\mathcal{A} \not\vdash_N 0$,
(iii) $\mathcal{A} \vdash_N \phi$ *et* $\mathcal{A} \vdash_N \neg\phi$ *pour aucune formule* ϕ.

La N-cohére ce s'avère équivale te à la cohére ce séma tique.

Theorem 1. *[Lindenbaum]. Une théorie $\mathcal{A}$ est cohérente ssi elle est N-cohérente.*

La o -cohére ce séma tique a u témoi fi i.

Theorem 2. *(de compacité) [Maltsev]*
Si tout sous-ensemble fini d'une théorie $\mathcal{T}$ est cohérent, alors $\mathcal{T}$ l'est aussi.

Theorem 3. *(théorème principal de complétude de $\vdash_N$)*
$Th(\mathcal{A}) = Th_N(\mathcal{A})$ *pour toute axiomatique* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}^P$.

Notation. Soit $V_0 \subset V$ u e semble fi i de lettres propositio elles. Alors, $\mathcal{L}^P[V_0]$, $Th^{V_0}(\Gamma)$, $Tm^{V_0}(\mathcal{M})$ so t les restrictio s correspo da t de $\mathcal{L}^P$, $Th(\Gamma)$, $Tm(\mathcal{M})$ aux lettres da s V_0.

Corollaire 1. *Pour chaque $V_0 \subset V$ fini et une théorie propositionnelle $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{L}^P[V_0]$ il existe une formule $\phi_{\mathcal{T}} \in Th^{V_0}(\mathcal{T})$ telle que*

$$Th^{V_0}(\mathcal{T}) = Th^{V_0}(\phi_{\mathcal{T}}) = Tm^{V_0}(\mathcal{M}(\phi_{\mathcal{T}})) = Tm^{V_0}(\mathcal{M}(\mathcal{T})).$$

Conclusion. E logique propositio elle :

- la co séque ce logique $\models$ peut être remplacée sa s perte de gé éralité par ses a a-logues formels : $\vdash_t$, $\vdash_r$, $\vdash_N$;

- les théories axiomatiques séma tiques $Th^P(\mathcal{A})$ et formelles $Th^P_t(\mathcal{A})$, $Th^P_r(\mathcal{A})$, $Th^P_N(\mathcal{A})$ coï cide t ;

- toute théorie d'u e semble fi i de propositio s est exprimée par u e seule formule.