Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Logique Mathématique pour l'Informatique

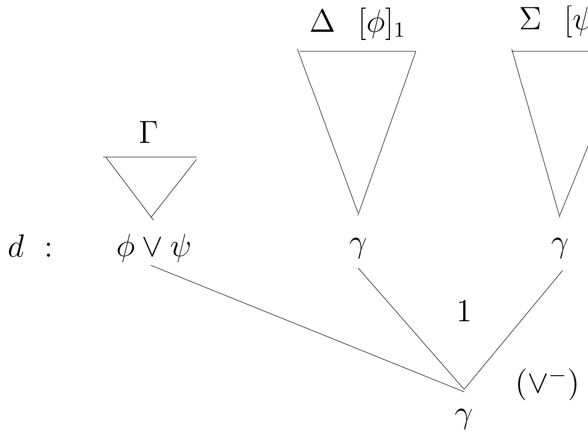
Cours 4. Calcul naturel des propositions.

Idée : Le raisonnement qui prouve un énoncé ϕ c'est un historique complet d'une déduction de ϕ à partir d'un ensemble d'hypothèses Γ. Cet historique est composé des historiques des preuves des énoncés auxiliaires (*les règles de composition des historiques étant les règles de preuve*).

4.1. Dérivations :

- Dérivation de ϕ à partir des hypothèses $\Gamma = \{\psi_1, ..., \psi_k\}$: un arbre d décoré par des formules, dont la racine est ϕ, et dont les feuilles sont $\Gamma \cup \Delta$ - les formules $\delta \in \Delta$ étant marquées comme les hypothèses utilisées : $[\psi]_i$ (i : le numero d'un pas).
- Assertion de la dérivation d est un *séquent* $\Gamma \vdash \phi$.

Exemple 1. *La dérivation d ci-dessous est représentée sous la forme d'un arbre :*

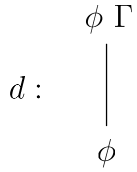


Cet arbre est une dérivation de γ à partir des hypothèses $\Gamma\Delta\Sigma$ (c'est-à-dire, du séquent $\Gamma\Delta\Sigma \vdash \gamma$) selon la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B, \quad [A]\ \Delta \vdash C, \quad [B]\ \Sigma \vdash C}{\Gamma\ \Delta\ \Sigma \vdash C} \qquad (\vee^-)$$

$(A = \phi, B = \psi, C = \gamma)$.

4.2. Hypothèses :



Dans cette preuve primitive qui correspond au séquent trivial : $\phi\ \Gamma \vdash \phi$, la formule ϕ est

~~prouvée à partir d'elle même (et d'un ensemble d'autres formules Γ qui peut être vide).~~ [redacted]
Ainsi $\phi \cup \Gamma$ sont les hypothèses dans la preuve de ϕ. Les hypothèses sont introduites dans les preuves en utilisant les séquents triviaux.

4.3. Règles de preuve :

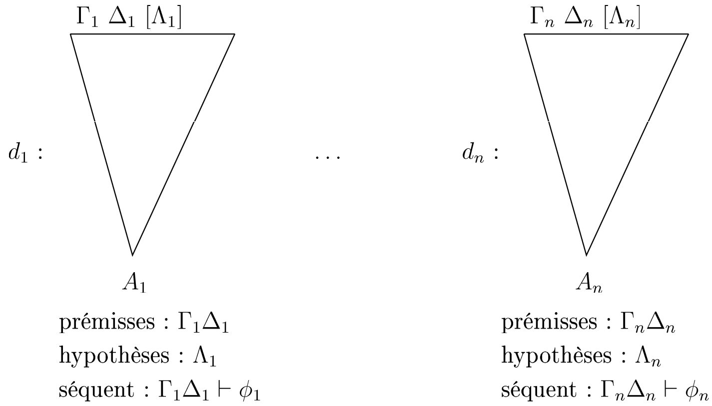
Forme générale des règles du CN :

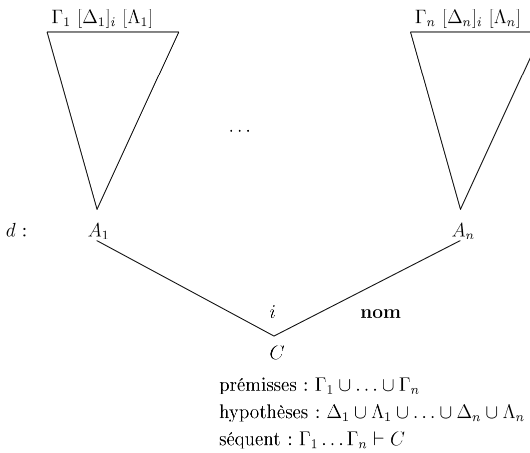
$$\frac{\Gamma_1[\Delta_1] \vdash A_1, ..., \Gamma_n[\Delta_n] \vdash A_n}{\Gamma_1 ... \Gamma_n \vdash C} \qquad (\textbf{nom})$$

$A_1, ..., A_n, C$: des formules,
$\Gamma_1, ..., \Gamma_n, \Delta_1, ..., \Delta_n$: des ensembles finis de formules (*hypothèses*),
$\Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$: hypothèses *utilisées*,
$\Gamma_1\Delta_1 \vdash A_1, ..., \Gamma_n\Delta_n \vdash A_n$: séquents *prémisses*,
[redacted]

4.4. Application des règles :

- composition de dérivations, éventuellement accompagnée par l'utilisation des hypothèses.





4.5. REGLES DU CALCUL NATUREL (classique) :

Règles d'introduction des connecteurs

$(\to^+)$ $$\frac{[A]\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

$(\wedge^+)$ $$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma\Delta \vdash (A \wedge B)}$$

$(\vee^+)$ $$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

$(\neg^+)$ $$\frac{[A]\ \Gamma \vdash B \quad [A]\ \Delta \vdash \neg B}{\Gamma\Delta \vdash \neg A}$$

Règles d'élimination des connecteurs

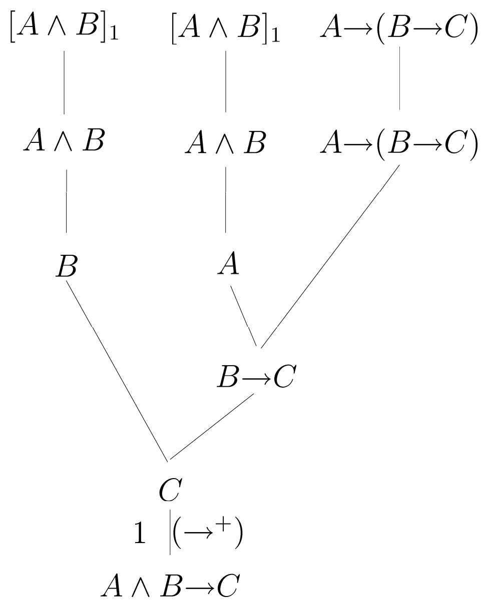
$(\to^-)$ $$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash (A \to B)}{\Gamma\Delta \vdash B}$$

$(\wedge^-)$ $$\frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash B}$$

$(\vee^-)$ $$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad [A]\ \Delta \vdash C \quad [B]\ \Sigma \vdash C}{\Gamma\Delta\Sigma \vdash C}$$

$(\neg^-)$ $$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Exemple 2. $A \to (B \to C)\ \vdash\ A \wedge B \to C$



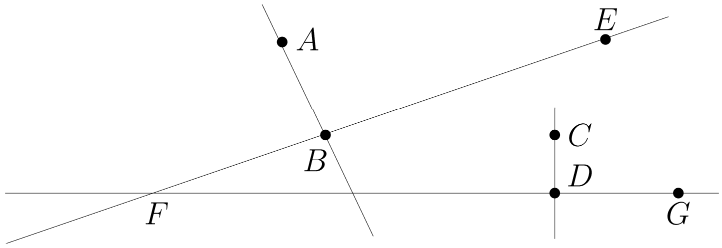
4.6. Correction du CN $\vdash_N$.

$\Gamma \vdash_N \phi$: il existe une dérivation de l'assertion $\Gamma \vdash \phi$.

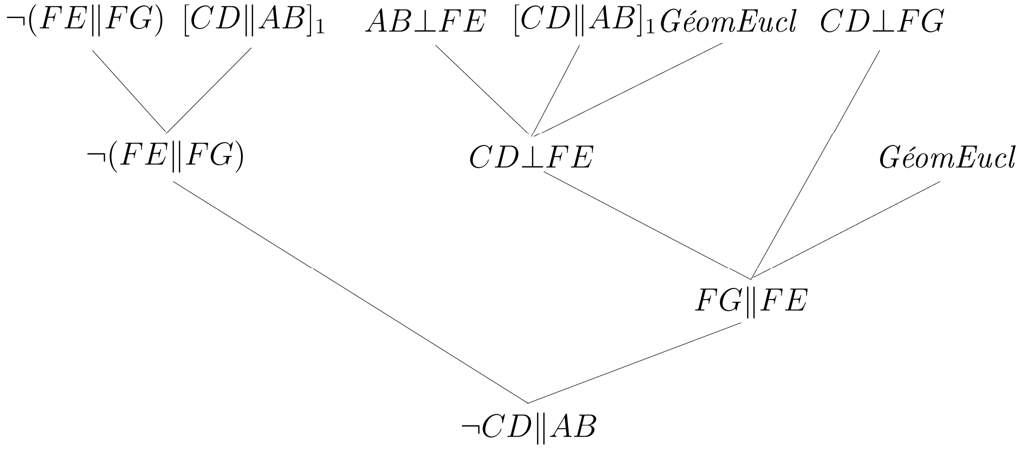
Théorème 1. *(Correction du CN). $\Gamma \vdash_N \phi$ implique $\Gamma \models \phi$.*

Exemple 2. Raisonnement naturel humain :

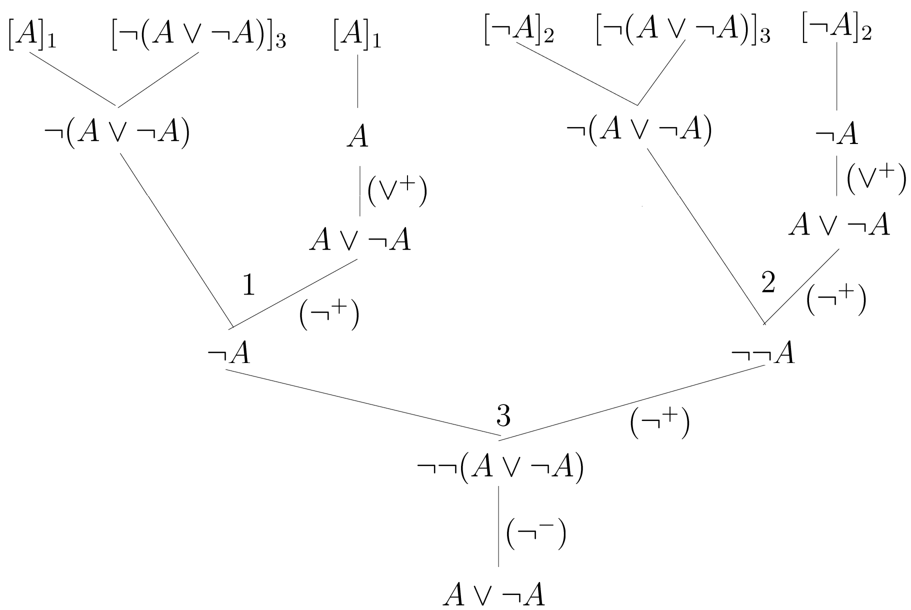
Soient deux droites FE, FG **concourantes**. *Soit* $AB \perp FE$ *et* $CD \perp FG$. *Il faut prouver que* AB *et* CD *sont, elles aussi, concourantes.*



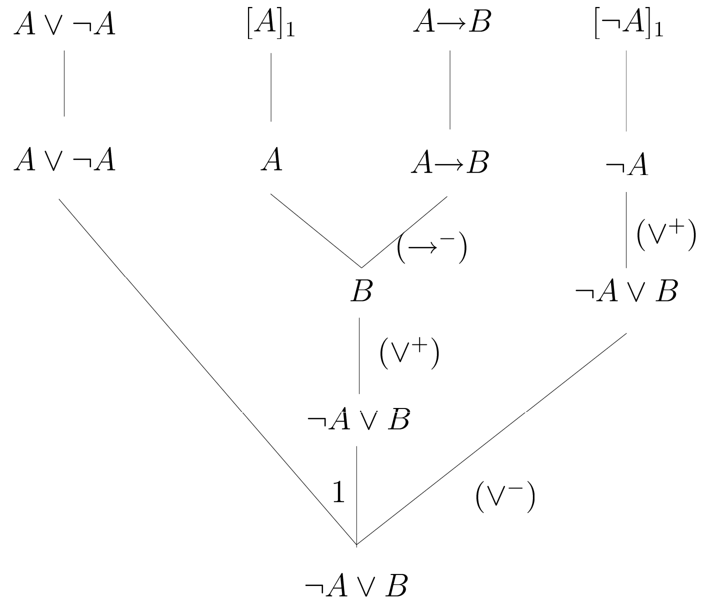
Raisonnement par l'absurde dans le calcul naturel :



Exemple 3.



Exemple 4.



[redacted]

Lemme 1. *Si* $\Gamma \vdash_N \phi$ *et* $\phi\Delta \vdash_N \psi$, *alors* $\Gamma\Delta \vdash_N \psi$.

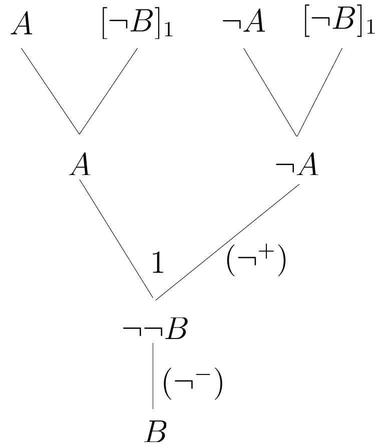
Corollaire 1. *Si* $\Gamma_1 \vdash_N \phi_1, ..., \Gamma_k \vdash_N \phi_k$, *et* $\Delta, \phi_1, ..., \phi_k, \vdash_N \phi$, *alors la règle*

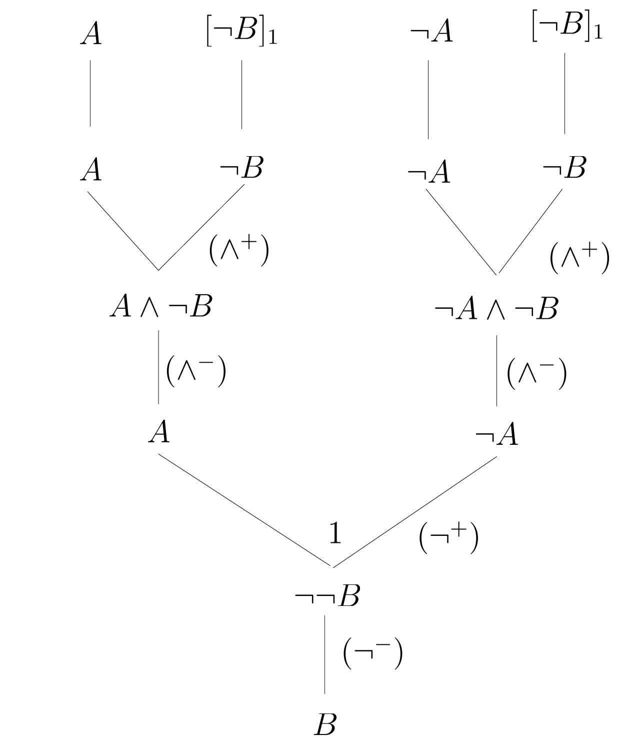
*(***dér** *nom)* $\qquad \dfrac{\Gamma_1 \vdash \phi_1, ..., \Gamma_k \vdash \phi_k}{\Delta\Gamma_1 ... \Gamma_k \vdash \phi}$ $\qquad$ *est correcte.*

Exemple 5. *A partir des dérivations* $\vdash_N A \vee \neg A$ *(exemple 3) et* $A \vee \neg A, A \to B \vdash_N \neg A \vee B$ *(exemple 4) on obtient la règle dérivée*

*(***dér** $\to\vee$*)* $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg A \vee B}$

Exemple 6. *Chacune des dérivations suivantes :*



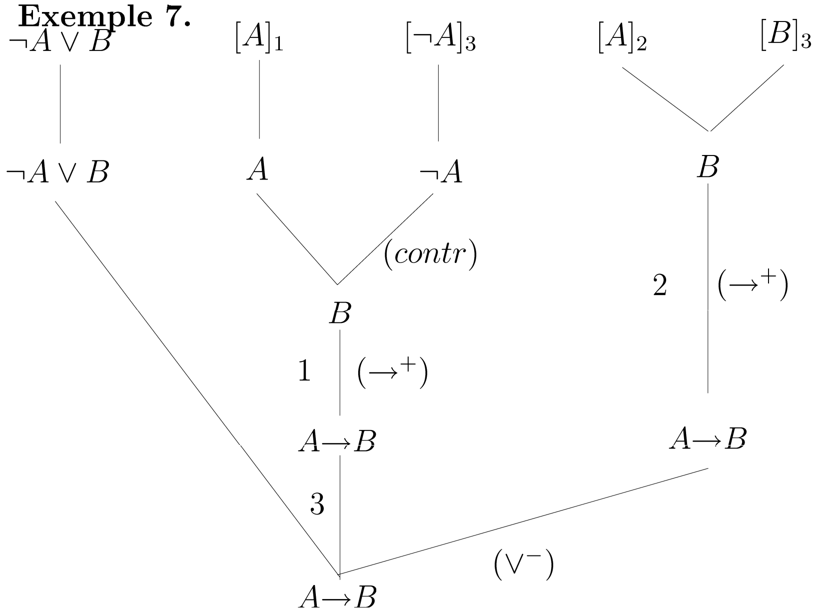


donne la règle dérivée :

(*dér *contr) $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma\Delta \vdash B}.$

On peut utiliser les règles dérivées comme les règles propres du CN :

Exemple 7.



ce qui donne une autre règle dérivée

(dér $\vee\rightarrow$) $\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg A \vee B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}.$

9. REGLES DU CALCUL NATUREL INTUITIONNISTE :

Règles d'introduction		Règles d'élimination	
$(\to^+)$	$\dfrac{[A]\,\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$	$(\to^-)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash (A \to B)}{\Gamma\Delta \vdash B}$
$(\wedge^+)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma\Delta \vdash (A \wedge B)}$	$(\wedge^-)$	$\dfrac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash B}$
$(\vee^+)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$(\vee^-)$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \quad [A]\,\Delta \vdash C \quad [B]\,\Sigma \vdash C}{\Gamma\Delta\Sigma \vdash C}$
$(\neg^+)$	$\dfrac{[A]\,\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A}$	$(\neg^-)$	$\dfrac{A\,\Gamma \vdash \neg A}{A\,\Gamma \vdash \perp}$

Règle de Duns Scott (DS) $\quad \perp \vdash A$

4.8. CN intuitionniste

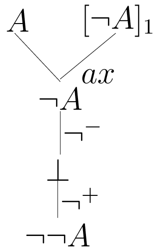
Critique : La loi du tiers exclu (TE) : $A \vee \neg A$ a été prouvée à l'aide de la règle $(\neg^-)$). Les deux règles ne sont pas acceptées par les partisans du raisonnement **constructif** parce qu'elles n'ont pas d'interprťation algorithmique et peuvent être utilisées pour prouver l'existance des objets sans donner un algorithme qui les construit :

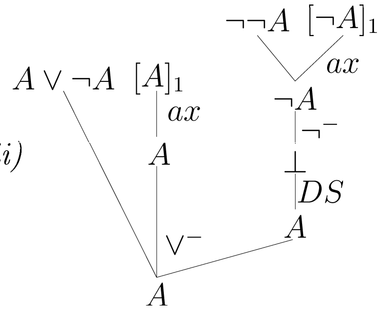
Exemple 8. *Il existe x, y irrationnels tels que x^y est rationnel. Soit $A \equiv (\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in Rat)$. Alors, $\models A \vee \neg A$.*
(i) Si A est vrai, alors $x = y = \sqrt{2}$. (ii) Sinon $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$.

Pour cette raison, L.E.J. Brouwer a donné une formalisation *intuitive* de la logique avec des nouvelles règles de négation. Son système s'appelle **intuitionniste** (dans ce système, la formule $\perp$ représente une *contradiction* explicite).

Théorème 2. *(Correction du CI).* $\Gamma \vdash_I \phi$ *implique* $\Gamma \models \phi$.

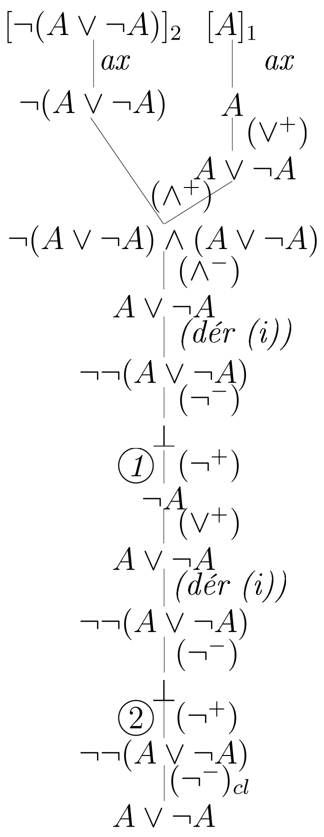
Exemple 9. *Preuves intuitionnistes :*
(i) $A \vdash_I \neg\neg A$,
(ii) $TE, \neg\neg A \vdash_I A$.

(i) 

(ii) 

L'exemple 9(ii) montre que dans le système $I + TE$ on peut dériver la règle $\neg^-$ classique ($(\neg^-)_{cl}$). On peut aussi prouver que dans le système $I + (\neg^-)_{cl}$ TE est dérivable (c'est-à-dire, TE et $(\neg^-)_{cl}$ sont déductivement équivalentes dans I) :

Exemple 10.

(iii) 

Théorème 3. *(Lien avec CN).* $(A \vee \neg A), \Gamma \vdash_I \phi$ *ssi* $\Gamma \vdash_N \phi$.

C'est-à-dire, $CI + TE \equiv CN$.