Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Logique Mathématique pour l'Informatique

Cours 2. Principes sémantiques généraux.

1 Les formules et les FB

Les f rmules de $\mathcal{L}^P$ expriment les FB.

Question : Est-ce que t ute FB est exprimée par une f rmule ?

La rép nce est ≪OUI≫ .

Théorème 1. *Pour toute FB $b(A_1, ..., A_k)$, il existe une formule $\phi_b \in \mathcal{L}^P$ qui l'exprime.*

La f rmule ϕ_b a une f rme particulière dite *forme normale disjonctive* **FND** :

(∗) $$\vee_{i=1}^{m} \wedge_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$

l_{ij} étant s it des lettres : A, s it leurs négati ns : $\neg A$. (**littéraux**)

Preuve du thé rème 1 : La f rmule en FND est la disj ncti n de t us les patr ns des m dèles de ϕ (v ir l'exemple suivant). Le patr n d'un c ntexte I est vrai dans I et faux dans les c ntextes différents.

Exemple 1.

$b(A, B, C)$:

A	B	C	*valeurs*	*patrons des modèles*
1	1	1	0	
1	1	0	$\boxed{1}$	$A \wedge B \wedge \neg C$
1	0	1	$\boxed{1}$	$A \wedge \neg B \wedge C$
1	0	0	0	
0	1	1	$\boxed{1}$	$\neg A \wedge B \wedge C$
0	1	0	0	
0	0	1	$\boxed{1}$	$\neg A \wedge \neg B \wedge C$
0	0	0	0	

$\phi_b = A \wedge B \wedge \neg C \vee A \wedge \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge C$ *et* $FB(\phi_b) = b(A, B, C)$.

Remarque. Certes, ϕ_b n'est pas la seule f rmule exprimant $b(A, B, C)$. Par exemple, $\phi = ((A \to \neg B) \leftrightarrow C \equiv \phi_b$.

Corollaire 1. *Pour toute formule $\phi \in \mathcal{L}^P$ non-contradictoire, il existe une formule équivalente $\psi \equiv \phi$ en F D.*

Corollaire 2. *b est une FB ssi elle est exprimée par une formule propositionnelle.*

Remarque. Une f rmule peut av ir plusieurs FND.

Exemple 2. $A \equiv A \wedge B \vee A \wedge \neg B$.

Définition 1. *Soit une formule ϕ. Une formule en F D $\phi_0 \equiv \phi$ s'appèle* FND can nique *de ϕ, si $PR(\phi_0) = PR(\phi)$, les membres de la disjonction ne se doublent pas et contiennent exactement une occurrence de toute lettre de $PR(\phi)$.*

Le thé rème 1 ne d nne pas t uj urs la FND can nique. Mais une f rmule n n-c ntradict ire peut av ir une *seule* FND can nique. **Pourquoi ?**

2 Transformations équivalentes

Substitutions :
$\phi[\psi\backslash\eta]_i$ dén te la substituti n de la f rmule η à la place de l' ccurrence i de la s us f rmule ψ dans ϕ.
$\phi(\psi\backslash\eta)$ dén te la substituti n de la f rmule η à la place de *toute occurrence* de la s us f rmule ψ dans ϕ.

S it A une lettre sans ccurrences dans ψ, $\phi_1 =_{df} \phi(\psi\backslash A)$, et les h m m rphismes h_1, h_2 définis par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} h_1(A) & = & \psi \\ h_1(B) & = & B, \ si\ A \neq B \end{array} \right. \quad et \quad \left\{ \begin{array}{lcl} h_2(A) & = & \eta \\ h_2(B) & = & B, \ si\ A \neq B \end{array} \right.$$

Al rs, il est claire que

$$\phi = h_1(\phi_1) \ et \ \phi(\psi\backslash\eta) = h_2(\phi_1)$$

(n dit que ϕ et $\phi(\psi\backslash\eta)$ s nt deux *instances* de la f rmule ϕ_1).

Exemple 3. $((D\leftrightarrow\neg B) \vee (B\rightarrow\neg(D\leftrightarrow\neg B)) \wedge C)((\mathbf{D}\leftrightarrow\neg\mathbf{B})\backslash\neg\mathbf{B}) = (\neg B \vee (B\rightarrow\neg\neg B) \wedge C)$
$= h_1((A \vee (B\rightarrow\neg A) \wedge C))$, *où* $h_1(A) = (D\leftrightarrow\neg B)$.

$((D\leftrightarrow\neg B) \vee (B\rightarrow\neg(D\leftrightarrow\neg B)) \wedge C)[(\mathbf{D}\leftrightarrow\neg\mathbf{B})\backslash\neg\mathbf{B}]_{\mathbf{2}} = ((D\leftrightarrow\neg B) \vee (B\rightarrow\neg\neg B) \wedge C)$.

Les principes généraux s nt pr uvés par inducti n sur la structure des f rmules :

Principe d'induction structurelle. S it Q une pr priété des f rmules.
Soit $Q(A)$ vrai pour toute lettre propositionnelle $A \in P$.
Soit $Q(\neg\phi)$ et $Q(\phi_1 \circ \phi_2)$ vrai pour tout connecteur $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
si $Q(\phi), Q(\phi_1)$ et $Q(\phi_2)$ sont vraies.
Dans ce cas, $Q(\psi)$ est vrai pour toute formule $\psi \in \mathcal{L}^P$.

1°. **Principe de substitution dans une occurrence :** S it $\psi[\phi_1]_i$ l' ccurrence i de ϕ_1 dans ψ. Al rs

$$\frac{\phi_1 \equiv \phi_2}{\psi[\phi_1]_i \equiv \psi[\phi_1 \backslash \phi_2]_i}$$

Théorème 2. *Si* $\psi \equiv \psi'$*, alors* $\phi[\psi]_i \equiv \phi[\psi \backslash \psi']_i$ *pour tout* i*.*

2°. **Principe de substitution dans toute occurrence :**

$$\frac{\models \phi, \qquad A \in P}{\models \phi(A \backslash \psi)}$$

Théorème 3. *Si* $\models \phi$*, alors* $\models \phi(A \backslash \psi)$ *pour toute lettre* A *et toute formule* ψ*.*

Application des principes de substitution.

Le thé rème 3 implique :

Corollaire 3. *Si* $\phi_1 \equiv \phi_2$*, alors* $\phi_1(A \backslash \psi) \equiv \phi_2(A \backslash \psi)$ *pour toutes* A *et* ψ*.*

L'équivalence $e_2 = (\phi_1(A \backslash \psi) \equiv \phi_2(A \backslash \psi))$ dans l'én ncé de ce c r llaire s'appèle *instance* de l'équivalence $e_1 = (\phi_1 \equiv \phi_2)$ $(e_2 = h(e_1),$ ù $h(A) = \psi)$.

Définition 2. *Supposons que* $e = (\eta_1 \equiv \eta_2)$ *soit une équivalence,* $h(e) = (\phi_1 \equiv \phi_2)$ *soit une instance de* e *et* $\psi_2 = \psi_1[\phi_1 \backslash \phi_2]_i$ *pour une formule* ψ_1*. Alors,* $\psi_1 \equiv \psi_2$ *selon le corollaire 3 et les théorèmes 2,3. On dit que* ψ_2 *résulte de* ψ_1 *par la* transf rmati n équivalente e *(noté :* $\psi_1 \Rrightarrow_e \psi_2$*). Si* $\phi \Rrightarrow_{e_1} \ldots \Rrightarrow_{e_k} \psi$*, on dit que* ϕ *est* transf rmée en ψ *par équivalences* $e_1 \ldots e_k$*.*

Il s'avère que la liste 1 des équivalences est *complète* dans le sens suivant.

Théorème 4. *Si* $\phi \equiv \psi$*, alors on peut transformrer* ϕ *en* ψ *par les équivalences de la liste 1.*

Corollaire 4. *Toute formule propositionnelle* ϕ *non-contradictoire peut être transformée en une F D (en particulier, en sa F D canonique unique) par les équivalences de la liste 1.*

Exemple 4.
$e_9 = (\neg\neg A \equiv A)$ *implique* $\neg\neg\phi \Rrightarrow_9 \phi$ *pour toute formule* $\phi \in \mathcal{L}^P$ *;*
$e_8 = ((A \vee (B \wedge C)) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C))$ *implique* $(\phi \vee (\psi \wedge \eta)) \Rrightarrow_8 (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$ *et en particulier,* $(\phi \vee (\psi \wedge \eta)) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \eta)$ *pour toutes* $\phi, \psi, \eta \in \mathcal{L}^P$ *.*

En utilisant les équivalences établies n peut pr uver d'autres équivalences dérivées et les utiliser p ur transf rmer les f rmules.

N t ns $\mathbf{1}$ la f rmule $A \vee \neg A$ et $\mathbf{0}$ $A \wedge \neg A$ p ur une lettre pr p siti nnelle A.

Equivalences remarquables, liste 2 :

($e_{2,1}$) $\neg 0 \equiv 1$
($e_{2,2}$) $\neg 1 \equiv 0$
($e_{2,3}$) $1 \wedge \phi \equiv \phi$
($e_{2,4}$) $0 \wedge \phi \equiv 0$
($e_{2,5}$) $1 \vee \phi \equiv 1$
($e_{2,6}$) $0 \vee \phi \equiv \phi$
($e_{2,7}$) $1 \rightarrow \phi \equiv \phi$
($e_{2,8}$) $0 \rightarrow \phi \equiv 1$
($e_{2,9}$) $\phi \rightarrow 1 \equiv 1$
($e_{2,10}$) $\phi \rightarrow 0 \equiv \neg\phi$
($e_{2,11}$) $\phi \leftrightarrow 1 \equiv \phi$
($e_{2,12}$) $\phi \leftrightarrow 0 \equiv \neg\phi$.

Exemple 5.
(1) En utilisant les équivalences de la liste 1 on peut par exemple prouver l'équivalence $e_{2,1}$ *:*
$\neg 0 =_{df} \neg(A \wedge \neg A) \Rrightarrow_{1,1} \neg(\neg A \wedge A) \Rrightarrow_{1,10} \neg\neg A \vee \neg A \Rrightarrow_{1,9} A \vee \neg A = 1$
(2) En utilisant les équivalences des listes 1,2 on peut par exemple prouver :
$(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow \neg(B \vee C)) \Rrightarrow_{1,12} (e_{12}$ *dans la liste* $1)$
$(A \rightarrow B) \wedge (\neg C \vee \neg(B \vee C)) \Rrightarrow_{1,11}$
$(A \rightarrow B) \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge \neg C)) \Rrightarrow_{1,12}$
$(\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge \neg C)) \Rrightarrow_{1,7}$
$(\neg A \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge \neg C))) \vee (B \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge \neg C))) \Rrightarrow_{1,7}$
$\neg A \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee B \wedge \neg C \vee B \wedge \neg B \wedge \neg C \Rrightarrow_{1,1;1,3}$
$\neg A \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee B \wedge \neg C \vee B \wedge \neg B \wedge \neg C \Rrightarrow_{2,4;2,6}$
$\neg A \wedge \neg C \vee \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee B \wedge \neg C$ *(en F D).*

Le thé rème 4 suggère l'idée de transf rmer la l gique pr p siti nnelle en une algèbre : les seuls bjets de cette algèbre devraient être la vérité et la fausseté, les c nnecteurs deviendraient les pérati ns sur ces valeurs, les f rmules deviendraient les expressi ns, et l'équivalence devrait devenir l'égalité. M ntr ns c mment une telle algébraisati n est effectuée p ur la l gique pr p siti nnelle dans la signature réduite aux c nnecteurs $\neg, \wedge, \vee$.

Notation. S it un ensemble de c nnecteurs **C**. $\mathcal{L}^P(\mathbf{C})$ est le s us-langage de $\mathcal{L}^P$ des f rmules utilisantes des c nnecteurs dans **C** (c'est-à-dire, dans la *signature* **C**).

Exemple : Les FND s nt dans $\mathcal{L}^P(\neg, \wedge, \vee)$.

Définition 3. *Algèbre de Boole* $A = (0, 1, \neg, \wedge, \vee)$ *:*

$x \wedge \neg x = 0$		$x \vee \neg x = 1$
$\neg 0 = 1$	$0 \wedge x = 0$	$0 \vee x = x$
$\neg 1 = 0$	$1 \wedge x = x$	$1 \vee x = 1$
$\neg\neg x = x$	$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$	$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
$x \wedge x = x$	$x \wedge y = y \wedge x$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
$x \vee x = x$	$x \vee y = y \vee x$	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$		$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$

On peut pr uver l'asserti n suivante :

Théorème 5. *Pour toutes formules* $\phi, \psi \in \mathcal{L}^P(\neg, \wedge, \vee)$, $\phi \equiv \psi$ *si et seulement si* $\phi =_A \psi$.
Question : A qu i c rresp ndent les taut l gies et les c ntradicti ns en l'algèbre de B le ?

3 Dualité

Connecteurs duax $\circ, \bullet$ **:** $\neg(\phi \circ \psi) \equiv \neg\phi \bullet \neg\psi$ (**Exemple :** $\wedge$ et dual à $\vee$).

Formule ϕ^* **duale à** ϕ **:** ϕ^* est le résultat de remplacement dans ϕ de t ut c nnecteur par s n dual.

Exemple : $(\neg X \wedge Y \vee Z)^* = (\neg X \vee Y) \wedge Z$. Attenti n aux pri rités !

3°. **Principe de dualité**

Théorème 6. *Pour* $\phi, \psi \in \mathcal{L}^P(\neg, \wedge, \vee)$,
(PD1) $\phi \equiv \psi$ *ssi* $\phi^* \equiv \psi^*$.
(PD2) $\models \phi$ *ssi* ϕ^* *est une contradiction.*
(PD3) $\models \neg\phi$ *ssi* $\models \phi^*$.
(PD4) $\phi \models \psi$ *ssi* $\psi^* \models \phi^*$.
*(PD5) (***principe de dualité***)* $\neg\phi \equiv \phi^*(A_1\backslash\neg A_1, ..., A_k\backslash\neg A_k)$.
Une application du principe de dualité :

La f rme des f rmules qui est duale à la f rme n rmale disj nctive :

$$(**) \qquad \wedge_{i=1}^{m} \vee_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$

s'appèle *forme normale conjonctive* (**FNC**).
Théorème 7. *Pour toute formule* ϕ *il existe une formule equivalente en F C.*

Si ϕ est une taut l gie, al rs elle est équivalente à $A \vee \neg A$. Sin n, n lui applique l'alg - rithme illustré par l'exemple 6.

Corollaire 5. *Toute formule propositionnelle* ϕ *non-tautologique peut être transformée en une F C (en particulier, en sa F C canonique unique) par les équivalences de la liste 1.*

Exemple 6.
$b(A, B, C) =$

A	B	C	*valeurs*	*contre-patrons*
1	1	1	$\boxed{0}$	$(A \wedge B \wedge C)^*(\mathbf{A}\backslash\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}\backslash\neg\mathbf{B}, \mathbf{C}\backslash\neg\mathbf{C}) = \neg A \vee \neg B \vee \neg C$
1	1	0	1	
1	0	1	1	
1	0	0	$\boxed{0}$	$(A \wedge \neg B \wedge \neg C)^*(\mathbf{A}\backslash\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}\backslash\neg\mathbf{B}, \mathbf{C}\backslash\neg\mathbf{C}) = \neg A \vee B \vee C$
0	1	1	1	
0	1	0	$\boxed{0}$	$(\neg A \wedge B \wedge \neg C)^*(\mathbf{A}\backslash\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}\backslash\neg\mathbf{B}, \mathbf{C}\backslash\neg\mathbf{C}) = A \vee \neg B \vee C$
0	0	1	1	
0	0	0	$\boxed{0}$	$(\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)^*(\mathbf{A}\backslash\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}\backslash\neg\mathbf{B}, \mathbf{C}\backslash\neg\mathbf{C}) = A \vee B \vee C$

Soit $\psi_b =_{df} \neg[(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee\neg C)(\mathbf{A}\backslash\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}\backslash\neg\mathbf{B}, \mathbf{C}\backslash\neg\mathbf{C})] \equiv (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge (A \vee B \vee C)$. ψ_b *est en F C canonique et* $b = FB(\psi_b)$ *selon* **PD5**.

Remarque. Ainsi sel n les thé rèmes 1,7 n peut calculer la FND can nique d'une f rmule c mme la disj ncti n de ses patr ns et sa FNC can nique c mme la c nj ncti n de ses c ntre-patr ns.

4 Principes de conséquence

4°. **Modus ponens [Aristote]**

$$\frac{\Gamma \models \phi, \quad \Delta \models \phi\to\psi}{\Gamma\Delta \models \psi}$$

5°. **Modus tollens [Aristote]**

$$\frac{\Gamma \models \neg\psi, \quad \Delta \models \phi\to\psi}{\Gamma\Delta \models \neg\phi}$$

6°. **Principe de déduction**

$$\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi \text{ ssi } \Gamma \models \phi\to\psi.$$

Exemple 7.
(i) $(A\to(B\to C)) \models (B\to(A\to C))$ *par réduction des conséquences :*
(deux fois par MP) $A, B, (A\to(B\to C)) \models C$
(par PdD) $B, (A\to(B\to C)) \models (A\to C)$
(par PdD) $(A\to(B\to C)) \models (B\to(A\to C))$.
(ii) (par PdD) $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_k\} \models \psi$ *ssi* $\models \phi_1\to(\phi_2\to...(\phi_k\to\psi)...)$.