Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Logique Mathématique pour l'Informatique

Chapitre I. Logique propositionnelle ($\mathcal{L}^P$). Cours 1. Langage $\mathcal{L}^P$

1 Logique et informatique

1.1 Exemples de raisonnement

Exemple 1. *[Aristote (384–322 A.C.)]*
Prémisse 1 : *Toutes baleines habitent la mer.*
Prémisse 2 : *Toute baleine est mammifère.*
Conclusion : *Il existent des mammifères qui habitent la mer.*
QUESTION : ≪Est-ce correct ?≫

Exemple 2.
Question : *≪A qui est-ce le portrait ?≫*
Réponce : *≪C'est un fils de mon père, et je n'ai point ni frères ni sœurs≫ .*
Conclusion : *C'est mon portrait.*
POURQUOI ?

Exemple 3. *(Analyse des données). Soit un programme :*

PROG :
enum val $\{1, 2, 3\}$; – *un type énumérable*
val arr $[4]$; – *un tableau de taille* 4

Comment exprimer la propriété suivante de ces tableaux :

Proposition 1. *Quel que soit un contexte C, il existe $1 \leq i \neq j \leq 4$ tels que $C \models arr[i] = arr[j]$.*

Exemple 4. *Soient deux programmes :*

$PROG_1$:	$PROG_2$:
if $(x > 2)$	**if** $(x > 2)\{$
if $(y == 2)$	**if** $(y == 2)$
$z :=x\text{-}y;$	$z := x\text{-}y;$
else	$\}$ **else**
$z := 0;$	$z := 0;$

Comment peut on analyser les flux de contrôle pour les distinguer dans ces deux programmes ?

2 Syntaxe de $\mathcal{L}^P$ (logique propositionnelle)

Lexique :
Variables (lettres) propositionnelles : $P = \{A, B, C, ...\}$.
Connecteurs : $\wedge$ (*conjonction*), $\vee$ (*disjonction*), $\neg$ (*négation*), $\rightarrow$ (*implication*), $\leftrightarrow$ (*équivalence*).
Parenthèses.

Formules :
(1) $P \subsetneq \mathcal{L}^P$.
(2) $\dfrac{\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}^P}{\neg\phi_1, (\phi_1 \wedge \phi_2), (\phi_1 \vee \phi_2), (\phi_1 \rightarrow \phi_2), (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2) \in \mathcal{L}^P}$.
(ϕ_1, ϕ_2 : sous-formules.)
(3) $\Box$

Exemple 5. $A, \neg A, \neg\neg A, (A \rightarrow (B \rightarrow A)), ((A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B))$.

Priorités : $\neg\ > \wedge > \vee > \{\rightarrow, \leftrightarrow\}$

3 Sémantique de $\mathcal{L}^P$

Domaine booléen : $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$ (**1** - ≪vrai≫ , **0** - ≪faux≫).
Contexte (Interprétation) : $I : P \rightarrow \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.
Sémantique des connecteurs :

($\neg$) :

B	$t^{\neg}(B)$
1	0
0	1

($\wedge$) :

B_1	B_2	$t^{\wedge}(B_1, B_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

($\vee$) :

B_1	B_2	$t^{\vee}(B_1, B_2)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

($\rightarrow$) :

B_1	B_2	$t^{\rightarrow}(B_1, B_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

($\leftrightarrow$) :

B_1	B_2	$t^{\leftrightarrow}(B_1, B_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Sémantique des formules. Un contexte I étant donné :

(1) $\dfrac{\phi = A \in P}{\phi^I = A^I}$ (2) $\dfrac{\phi = \neg\phi_1}{\phi^I = t^{\neg}(\phi_1^I)}$ (3) $\dfrac{\phi = (\phi_1 \wedge \phi_2)}{\phi^I = t^{\wedge}(\phi_1^I, \phi_2^I)}$

(4) $\dfrac{\phi = (\phi_1 \vee \phi_2)}{\phi^I = t^{\vee}(\phi_1^I, \phi_2^I)}$ (5) $\dfrac{\phi = (\phi_1 \rightarrow \phi_2)}{\phi^I = t^{\rightarrow}(\phi_1^I, \phi_2^I)}$ (6) $\dfrac{\phi = (\phi_1 \leftrightarrow \phi_2)}{\phi^I = t^{\leftrightarrow}(\phi_1^I, \phi_2^I)}$

Exemple 6. *Pour une formule, par exemple pour* $\phi = ((A \wedge (A \to B)) \to B)$, *sa sémantique est déterminée par la fonction booléenne (FB), qui pour tout contexte* I *(évaluation des lettres propositionnelles) calcule la valeur de la formule dans ce contexte :*

$FB(\phi)(A, B))$:

A	B	$(A \to B)$	$(A \wedge (A \to B))$	ϕ
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Attention ! Comme ça, la sémantique est ambiguë (non unique) :

Exemple 7.

$FB(A \to C)(A, C)$:

A	C	$A \to C$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ou $FB(A \to C)(A, B, C)$:

A	B	C	$A \to C$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Correction. Notons par $PR(\phi)$ la liste des lettres (variables) propositionnelles dans ϕ. Pour définir la sémantique d'une formule ϕ, il faut se donner une liste L de lettres propositionnelles, avec la condition que $PR(\phi) \subseteq L$, et de définir la table de vérité de ϕ par rapport à L. Ainsi la sémantique de ϕ devient relative à cette liste.

Sémantique d'une formule ϕ relative à une liste $L, PR(\phi) \subseteq L$:
ϕ est la FB $FB(\phi)(L)$. $FB(\phi)(PR(\phi))$ est abbrégée par $FB(\phi)$.

La sémantique est devenu non-ambiguë.

Définition 1. *Si une formule* ϕ *est vraie dans un contexte* I *(notation :* $\phi^I = 1$*), alors on dit que* I *est un modèle de* ϕ*, ce qui est noté :* $I \models \phi$.

(1) ϕ *satisfaisable (SAT(*ϕ*)) :* $\phi^I = 1$ *pour un contexte* I *sur* $PR(\phi)$ *(c'est-à-dire,* ϕ *a un modèle).*

(2) ϕ *tautologie (*$\models \phi$*) :* $\phi^I = 1$ *pour tout* I *sur* $PR(\phi)$ *(tout contexte est son modèle).*

(3) ϕ *contradiction (CONTR(*ϕ*)) :* $\phi^I = 0$ *pour tout* I *sur* $PR(\phi)$ *(aucun modèle).*

(4) ϕ_1 *équivalente à* ϕ_2 *(*$\phi_1 \equiv \phi_2$*) :* $FB(\phi_1)(L) = FB(\phi_2)(L)$, *où*

$$L = PR(\phi_1) \cup PR(\phi_2).$$

(5) Un modèle d'un ensemble Γ *de formules est un contexte* I *tel que* $\phi^I = 1$ *pour toute* $\phi \in \Gamma$. *Notation :* $I \models \Gamma$.

(6) Γ *implique* ϕ *(*$\Gamma \models \phi$*) : tout modèle de* Γ *est un modèle de* ϕ*, c'est-à-dire,* $\phi^I = 1$ *si* $\psi^I = 1$ *pour toutes* $\psi \in \Gamma$ *et tout contexte* I *sur* $PR(\Gamma \cup \{\phi\})$.

Exemple 8. $\Gamma = \{A{\to}(B{\to}C), B\}, \phi = A{\to}C$. $PR(\Gamma \cup \{\phi\}) = \{A, B, C\}$.
$\Gamma \models \phi$ *(Tab. 1),*
$A{\to}(B{\to}C) \equiv B{\to}(A{\to}C)$ *(Tab. 2).*

A	B	C	$B{\to}C$	$A{\to}C$	$A{\to}(B{\to}C)$	$B{\to}(A{\to}C)$
1	$\boxed{1}$	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1
1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	$\boxed{1}$	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1
0	$\boxed{1}$	0	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Tab. 1 *Tab. 2*

Exemple 9. $\phi = \neg A,\ \psi = ((A{\to}(B{\wedge}\neg B))$. $\phi \equiv \psi$ *parce que* $FB(\phi)(A,B)) = FB(\psi)(A,B))$:

A	B	$\phi(A,B)$	$\neg B$	$(B \wedge \neg B)$	$\psi(A,B)$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

Théorème 1.
1. $\phi \equiv \psi$ *ssi* $\phi \models \psi$ *et* $\psi \models \phi$
ssi $\models (\psi{\leftrightarrow}\phi)$
ssi $\phi_1^I = \phi_2^I$ *pour tout contexte* I *sur* $PR(\{\phi_1, \phi_2\})$.
2. $\phi \models \psi$ *ssi* $\models \phi{\to}\psi$.
3. $\models \phi$ *ssi CONTR(*$\neg\phi$*).*
4. SAT(ϕ*) ssi non CONTR(*ϕ*).*

Corollaire 1. *Toutes deux tautologies* ϕ_1, ϕ_2 *sont équivalentes par rapport à la liste* $PR(\phi_1, \phi_2)$. *Toutes deux contradictions* ϕ_1, ϕ_2 *sont équivalentes par rapport à la liste* $PR(\phi_1, \phi_2)$.

Exemple 10. *(Équivalences remarquables. Liste 1).*
$(e_{1,1})$ $(A \wedge A) \equiv A$
$(e_{1,2})$ $(A \vee A) \equiv A$
$(e_{1,3})$ $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
$(e_{1,4})$ $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$
$(e_{1,5})$ $(A \wedge (B \wedge C)) \equiv ((A \wedge B) \wedge C)$
$(e_{1,6})$ $(A \vee (B \vee C)) \equiv ((A \vee B) \vee C)$
$(e_{1,7})$ $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
$(e_{1,8})$ $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
$(e_{1,9})$ $\neg\neg A \equiv A$
$(e_{1,10})$ $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

$(e_{1,11})$ $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
$(e_{1,12})$ $(A{\rightarrow}B) \equiv (\neg A \vee B)$
$(e_{1,13})$ $(A{\leftrightarrow}B) \equiv ((A{\rightarrow}B) \wedge (B{\rightarrow}A))$

Corollaire 2. *Les problèmes* $\ll \models \phi \gg$, $\ll$*SAT*$(\phi)\gg$, $\ll$*CONTR*$(\phi)\gg$, $\ll \phi_1 \equiv \phi_2 \gg$ *et* $\ll \Gamma \models \phi \gg$ *sont tous décidables.*