Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Lambda-calcul et Systèmes de Réécriture

Cours 4. Théories éqationnelles (TE)

λ est une des TE, c'est-à-dire, des théories

$$E = \{ M_i = N_i \mid i \in I \},$$

où M_i, N_i sont des termes sur une signature Σ. Grace à la propriété CR, λ est cohérente, définie les fonctions récursives partielles et aussi est sémi-décidable :
Algorithme partiel pour résoudre la validité des égalités :
Entrée : $M, N \in \Lambda$.
i) calculer $FN_\lambda(M) = M_0$ si elle existe) ;
ii) calculer $FN_\lambda(N) = N_0$ idem) ;
iii) vérifier $M_0 \equiv N_0$.
Les théoris équitionnelles générales utilisent les termes généraux dans les égalités.

1 Cadre général

Une TE est définie sur une **signature** Σ de foncteurs $\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k$, où $\mathcal{F}_k$ est un ensemble de **foncteurs d'arité** k, $\mathcal{F}_0$ est un ensemble de **constantes**. On suppose que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Etant donné un ensemble dénombrable V de **variables**, on définie l'ensemble des **termes** $T_\Sigma[V]$ isomorphes aux arbres dont les nœux sont étiquetés par les foncteurs et les variables : variables sont dans les feuilles). $T_\Sigma[\emptyset]$ est l'ensemble des **termes fermés**.

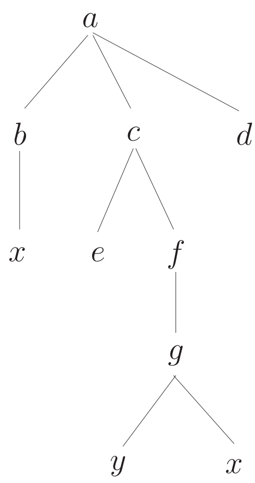
Exemple 1. $\Sigma_\lambda = \{\lambda x/1, \circ/2 \mid x \in V\}$. $\Sigma_{gr} = \{f/2, i/1, e/0\}$
(i : inverse, e : identité).

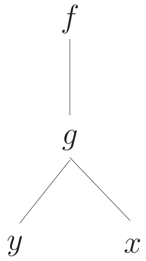
Définition 1. *Une égalité sur Σ, V est une expression $s \approx t$, où $s, t \in T_\Sigma[V]$. $s \approx t$ est* **fermée**, *si $s, t \in T_\Sigma[\emptyset]$. Une TE sur Σ est un ensemble E d'égalités sur Σ et V. E est* **fermée**, *si $V = 0$.*

Exemple 2. Théorie des groupes :
$\Sigma_{gr} = \{f/2, i/1, e/0\}$
$G = \{f(x, f(y, z)) \approx f(f(x, y), z),\ f(e, x) \approx x,\ f(i(x), x) \approx e\}$

Notation : Etant donné un terme t, t/p dénote le **sous-terme** de t identifié par son **index** p. $O(t)$ est l'ensemble des indexes des sous-termes de t. Alors $t/\epsilon = t$ ϵ est l'index vide).

Exemple 3.

$t =$ 

$t/22 =$ 

$t/2211 = y$

Définition 2. *Soit une application* $\sigma \ : \ V \to T_\Sigma[V]$. *Son* **domaine** *est*

$$DOM(\sigma) = \{x \in V \mid \sigma(x) \neq x\}$$

σ *est une* **substitution** *si* $DOM(\sigma)$ *est* **fini**. *Ainsi on peut déterminer toute substitution par son graphe fini :*

$$\sigma = \{x_1 \mapsto \sigma(x_1), ..., x_n \mapsto \sigma(x_n)\}.$$

Toute substitution s'étend à $T_\Sigma[V]$ *: si* $t \equiv f(s_1, ..., s_n)$, *alors* $\sigma(t) =_{df} f(\sigma(s_1), ..., \sigma(s_n))$. *Ainsi* $\sigma \ : \ T_\Sigma[V] \to T_\Sigma[V]$.

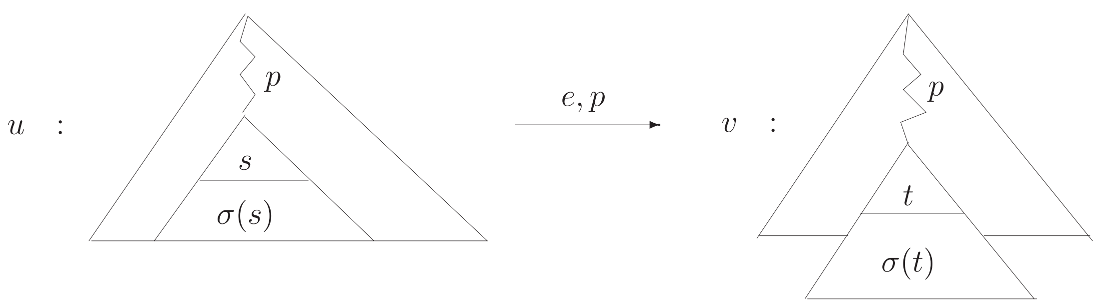
Exemple 4. $\sigma = \{x \mapsto f(e, z), \quad y \mapsto f(z, i(z))\}, \quad t \equiv f(f(x, e), y)$
$\sigma(t) = f(f(f(e, z), e), f(z, i(z))))$.

Définition 3. *Un terme* t *est un* **cas particulier** *(un* **instant***) d'un terme* s *(noté :* $s \lesssim t$*) s'il existe une substitution* σ *telle que* $t = \sigma(s)$.

Il est claire que l'ensemble des substitutions est fermé par composition : $\sigma\tau(x) = \sigma(\tau(x))$. Cela veut dire que $\lesssim$ est un **préordre** $\lesssim$ est réflexive et transitive).

Proposition 1. $s \lesssim t$ *et* $t \lesssim s$ *implique* $s \equiv t$.

Définition 4. *(E-réduction). Soit une TE* E *sur* Σ, V, *une égalité* $e = (s \approx t) \in E$, *un terme* $u \in T_\Sigma[V]$ *et une occurrence de sous-terme* $p \in O(u)$. *Alors* v *est le* **résultat de réduction de** u **par** e **dans l'occurrence** p *(noté* $u \xrightarrow{e,p} v$*) veut dire qu'il existe une* σ *: substitution* $(u/p \equiv \sigma(s) \wedge v = u[p \longleftarrow \sigma(t)])$ *:*



$$u \rightarrow_E v =_{df} \exists e \in E \ (\exists p \in O(u)(u \xrightarrow{e,p} v)).$$

Exemple 5. *1)* $u \equiv i(f(i(x), f(e, i(x))))$ *représent dans un groupe l'élément* $(x^{-1} \circ (e \circ x^{-1}))^{-1}$:

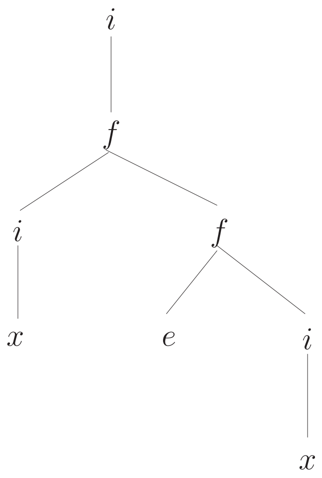
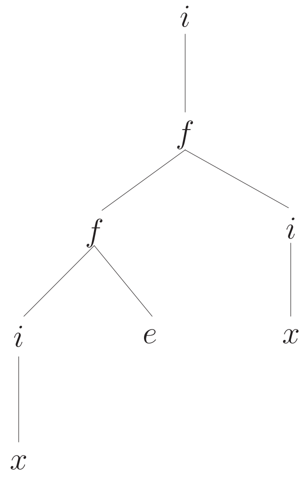
$$r = (f(A, f(B,C)) \approx f(f(A,B), C))$$

Soit $\sigma = \{A \mapsto i(x), \quad B \mapsto e, \quad C \mapsto i(x)\}$

Alors $\sigma(f(A, f(B,C))) = u/1$

et $u \xrightarrow{r,1} v$, *où*

$$v = i(f(f(i(x), e), i(x)))$$

$u =$  $v =$ 

2) Pour les axiomes G *des groupes,*

$$f(i(e), f(e,e)) \rightarrow_G f(f(i(e), e), e) \rightarrow_G f(e,e) \rightarrow_G e.$$

Définition 5. *E-réduction* $\rightarrow_E$ *sur* Σ *est* **fermée par Σ-opérations** *si*

$$s_1 \rightarrow_E t_1, ..., s_k \rightarrow_E t_k \ \text{et} \ f/k \in \Sigma, k \geq 0,$$

implique

$$f(s_1, ..., s_k) \rightarrow_E f(t_1, ..., t_k)$$

Elle est **fermée par Σ-contextes** *si pour tout contexte* $c[\ ]$ *sur* Σ, V,

$$s \rightarrow_E t \ \text{implique} \ c[s] \rightarrow_E c[t].$$

Proposition 2. *E est fermée par Σ-opérations ssi elle est fermée par Σ-contextes.*

Preuve : par induction sur les contextes.

Définition 6. $\rightarrow_E$ *est* **compatible avec les Σ-opérations** *si* $s \rightarrow_E t$ *implique*

$$f(s_1, ..., s_{i-1}, s, s_{i+1}, ..., s_k) \rightarrow_E f(s_1, ..., s_{i-1}, t, s_{i+1}, ..., s_k)$$

pour tous f/k $(k \geq 0)$ *et* s_i.

Proposition 3. *Si une relation binaire R sur les termes est un préordre, alors R est fermée par Σ-opérations ssi R est compatible avec les Σ-opérations.*

Toute E-réduction est un préordre :

Proposition 4. *Pour toute TE E, la E-réduction $\rightarrow_E$ est un préordre fermé par substitutions et par contextes (c'est-à-dire, par Σ-opérations).*

Corollaire 1. *Pour toute TE E la relation $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ est l'équivalence minimale sur $T_\Sigma[V]$ qui contient $\rightarrow_E$ ($\rightarrow_E \subseteq \overset{*}{\leftrightarrow}_E$) et qui est fermée par substitutions et par Σ-opérations.*

Cela donne la **sémantique opérationnelle** suivante de E :

Logique équationnelle :

$$\frac{(s \approx t) \in E}{E \models (s \approx t)} \qquad \frac{}{E \models (t \approx t)}$$

$$\frac{E \models (s \approx t)}{E \models (t \approx s)} \qquad \frac{E \models (s \approx t) \qquad E \models (t \approx u)}{E \models (s \approx u)} \qquad \frac{E \models (s \approx t)}{E \models (\sigma(s) \approx \sigma(t))}$$

$$\frac{E \models (s_1 \approx t_1), ..., E \models (s_k \approx t_k), \qquad f/k \in \Sigma \ \ (k \geq 0)}{E \models (f(s_1, ..., s_k) \approx f(t_1, ..., t_k))}$$

$E \models (s \approx t)$ est synonyme de $s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t$. Cette sémantique opérationnelle des TE correspond à la **règle de substition d'un sous-terme par un terme égal**.

Exemple 6. *(Une preuve) :* $E = \{a \approx b, \ \ f(x) \approx g(x)\}$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{E \models (a \approx b)}{E \models (f(a) \approx f(b))} \qquad \dfrac{E \models (f(x) \approx g(x))}{E \models (f(b) \approx g(b))}\ (x \mapsto b)}{E \models (f(a) \approx g(b))}}{E \models (g(b) \approx f(a))}$$

ce qui est équivalent à $g(b) \overset{*}{\leftrightarrow}_E f(a)$.

2 Sémantique dénotationnelle des TE

Tout comme dans la logique, la sémantique dénotationnelle est définie en termes de modèles des TE. Dans le cas de TE, un modèle est une **algèbre**.

Définition 7. *Soit une signature Σ. Une Σ-**algèbre** A est une structure $< D; \mathcal{F} >$, où*
*D est un ensemble (d'**objets**) et*
*$\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions sur D (dites **opérations**), qui interprètent les foncteurs de Σ :*
*pour tout $f/k \in \Sigma$, l'opération correspondante est une fonction **totale** sur D^k : $f_A : D^k \rightarrow D$.*

Exemple 7. $\Sigma_G = \{f/2,\ i/1,\ e/1\}$. *Le groupe multiplicatif des entiers*

$$\mathcal{Z} =< Z;\ +/2,\ -/1,\ 0/1 >$$

est une Σ_G*-algèbre :* $+/2$ *interprète* $f/2$, $-/1$ *interprète* $i/1$, 0 *interprète* 0.

Définition 8. *Soient deux* Σ*-algèbres* A, B. B *est une sous-algèbre de* A*, si* $B \subseteq A$. *Pour un sous-ensemble* $X \subseteq A$, B *est la* **sous-algèbre minimale engendrée par** X *si*

(1) $X \subseteq B \subseteq A$, *et*

(2) $B \subseteq A_1$ *pour toute sous-algèbre* $A_1 \subseteq A$ *qui contient* X.

On dit : X *est* **générateur** *de* B.

Exemple 8. *Le groupe* $\mathcal{Z}_2 = \{2 * z \mid z \in \mathcal{Z}\}$ *des entiers pairs est engendré par* $\{2\}$. *Etant donné un nombre premier* p, $\mathcal{Z}_p = \{p * z \mid z \in \mathcal{Z}\}$ *est engendré par* $\{p\}$.

Définition 9. *Soient deux* Σ*-algèbres* A, B. *Une application* $h\ :\ A{\rightarrow}B$ *est un* **homomorphisme** *si*

$$h(f_A(a_1, ..., a_n)) = f_B(h(a_1), ..., h(a_n))$$

pour tout foncteur $f/n \in \Sigma$ *et tous* $a_i \in A$.

Exemple 9. *1. Un* **isomorphisme** $A \cong B$ *est un homomorphisme bijectif* $h\ :\ A \stackrel{sur}{\rightarrow} B$. *Evidemment,* h^{-1} *est aussi un homomorphisme.*

2. $h_p\ :\ z \mapsto p * z$, *pour un* p *premier, est un isomorphisme* $h_p\ :\ \mathcal{Z}{\rightarrow}\mathcal{Z}_p$.

$$\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}_2 \cong \mathcal{Z}_3 \cong \mathcal{Z}_p\ ...$$

Définition 10. *1. Etant donnée une* Σ*-algèbre* A *et une* **congruence** $\leftrightarrow_R$ *sur* A *(c'est-à-dire une équivalence fermée par* Σ*-opérations), on peut définir le* **homomorphisme canonique** *suivant* $h_R\ :\ A \stackrel{sur}{\rightarrow} A/_{\leftrightarrow_R}\ :\ a \mapsto [a]_{\leftrightarrow_R}$.

2. Inversement, un homomorphisme $h : A{\rightarrow}B$ *induit la congruence suivante* $\leftrightarrow_h$ *sur* A *(dite* **noyau de** h*) :*

$$a \leftrightarrow_h b =_{df} h(a) = h(b) \text{ pour tous } a, b \in A.$$

Exemple 10. *Pour un* p *premier,* $z_1 \equiv_p z_2 =_{df} z_1 = z_2\ (mod\ p)$ *est une congruence sur* $\mathcal{Z}$. $\mathcal{Z}/_{\equiv_p} = \{[0]_{\equiv_p},\ [1]_{\equiv_p}, ..., [p-1]_{\equiv_p}\}$.

Proposition 5. $B \cong A/_{\leftrightarrow_h}$ *pour tout homomorphisme* $h\ :\ A \stackrel{sur}{\rightarrow} B$.

Définition 11. *(Algèbres libres). Soit une classe* $\mathcal{K}$ *de* Σ*-algèbres. Une algèbre* $\mathcal{A} = (A, F)$ *est* **libre dans** $\mathcal{K}$ **sur générateurs** $X \subseteq A$ *si pour toute algèbre* $B \in \mathcal{K}$ *et* **toute affectation** $\Theta\ :\ X{\rightarrow}B$ *il existe un homomorphisme* $h_\Theta\ :\ A{\rightarrow}B$ *qui coïncide avec* Θ *sur* X *(*$h_\Theta(a) = \Theta(a),\ a \in X$*).*

Remarque : h_Θ est unique pour toute Θ.

Exemple 11. $\mathcal{T}_\Sigma[V]=_{df}(T_\Sigma[V],\mathcal{F}_\Sigma)$ *définie par*

$$f_{\mathcal{T}_\Sigma[V]}(t_1,...,t_n)=_{df} f(t_1,...,t_n)$$

est libre dans $\mathcal{K}$ *sur* V*. Etant donnée une algèbre* $B\in\mathcal{K}$ *et une affectation* $\Theta\ :\ x\mapsto\Theta(x)\in B$*,* $x\in V$*,* $h_\Theta(t)$ *"calcule" la valeur du terme* t *dans* B*.*

Proposition 6. *S'il existe une algèbre libre* $\mathcal{A}=(A,F)$ *dans* $\mathcal{K}$ *sur* $X\subseteq A$*, alors* $\mathcal{A}\cong\mathcal{T}_\Sigma[V]$*, où* V *est un ensemble de variables de la même cardinalité que* X *(*$\| V \|=\| X \|$*).*

Cas particulier très important. Si $V=\emptyset$, alors $\mathcal{T}_\Sigma[\emptyset]=_{df}\mathcal{T}_\Sigma$ est dite **initiale**. Les algèbres initiales correspondent aux domaines d'Herbrand de la logique du 1^{er} ordre. $\mathcal{T}_\Sigma$ est l'ensemble des termes fermés sur Σ. Il est non vide, car $\mathcal{F}_0\neq\emptyset$. Toute algèbre $B\in\mathcal{K}$ est une image homomorphique de $\mathcal{T}_\Sigma$ c'est-à-dire $h\ :\ \mathcal{T}_\Sigma\overset{sur}{\to}B$).

Définition 12. *Soit une TE* E *sur* Σ *et* V*. Une égalité* $s\approx t\in E$ *est* **valide** *dans une* Σ*-algèbre* B *si* $h_\Theta(s)=h_\Theta(t)$ *pour toute affectation* $\Theta\ :\ V\to B$*.*

Rappel : Etant donnée une affectation $\Theta\ :\ V\to B$,

$$\begin{cases} h_\Theta(x)=\Theta(x) & \textit{pour } x\in V\\ h_\Theta(f(t_1,...,t_n))=f_B(h_\Theta(t_1),...,h_\Theta(t_n)). \end{cases}$$

$s\approx t$ est **satisfaisable** dans B, s'il existe une affectation $\Theta\ :\ V\to B$ telle que $h_\Theta(s)=h_\Theta(t)$. B est un **modèle** de E notation : $B\models E$) si toute son égalité est valide dans B. L'ensemble $Mod(E)$ de tous les modèles de E s'appele **variété** de E.

Exemple 12. $Mod(G)$ *est la variété des groupes.*

Proposition 7. *Si* E *est une TE sur* Σ,V*, alors* $\mathcal{T}_\Sigma[V]/_{\overset{*}{\leftrightarrow}_E}$ *est un modèle de* E *:* $\mathcal{T}_\Sigma[V]/_{\overset{*}{\leftrightarrow}_E}\models E$*. Cette algèbre est* libre *dans la variété* $Mod(E)$ *sur* V*.*

Remarque : Si $e=(s\approx t)\in E$, alors elle est valide dans tous les modèles de E, c'est-à-dire $Mod(E)\models e$.

Définition 13. *Une égalité* $u\approx v$ *est une* **conséquence de** E *si* $Mod(E)\models(u\approx v)$ *(dénoté :* $u=_E v$*).* $=_E$ *est la* sémantique dénotationnelle *de* E*. L'ensemble de toutes les conséquences de* E *est noté* $th(E)=_{df}\{u\approx v\mid Mod(E)\models(u\approx v)\}$.

Proposition 8. $s\overset{*}{\leftrightarrow}_E t$ *implique* $s=_E t$*.*

Evident.

Si on prouve l'implication inverse, alors on obtient l'équivalence des deux sémantiques des TE.

Théorème 1 (Birkhof). $s=_E t$ *ssi* $s\overset{*}{\leftrightarrow}_E t$ *pour toute TE* E *et tous termes* s,t*.*

Preuve : $s =_E t$ veut dire $Mod(E) \models (s \approx t)$. Selon la proposition 7, $\mathcal{T}_\Sigma[V]/_{\overset{*}{\leftrightarrow}_E} \in Mod(E)$ et donc $\mathcal{T}_\Sigma[V]/_{\overset{*}{\leftrightarrow}_E} \models (s \approx t)$. C'est-à-dire, $[s]_{\overset{*}{\leftrightarrow}_E} = [t]_{\overset{*}{\leftrightarrow}_E}$ et donc $s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t$.

Corollaire 2. *Si E est une TE énumérable (e.g. finie), alors $s =_E t$ est sémi-décidable.*

Mais toutes les TE ne sont pas décidables.

Exemple 13. *(Logique de combinateurs $\mathcal{C}$) :*

$$I \circ x = x$$
$$(K \circ x) \circ y = x$$
$$((S \circ x) \circ y) \circ z = (x \circ y) \circ (y \circ z)$$

Nous savons traduire λ en $\mathcal{C}$, c'est-à-dire, il existe un algorithme tr tel que

$$\lambda \models u = v \qquad ssi \qquad \mathcal{C} \models tr(u) = tr(v)$$

Par conséquent, si $\mathcal{C}$ était décidable, alors λ le serait aussi.

On peut essayer de résoudre le problème suivant plus faible dit **problème des mots** : "$E \models s \approx t$?" pour deux termes fermés s, t. Même le problème des mots n'est pas décidable :

Théorème 2 (Matijasevich). *Soit $\Sigma = \{a, b, \circ/2\}$. Le problème suivant des mots n'est pas décidable pour l'ensemble des égalités :*

$$E_M = \begin{cases} (xy)z \approx x(yz) \\ aba^2b^2 \approx b^2a^2ba \\ a^2bab^2a \approx b^2a^3ba \\ aba^3b^2 \approx ab^2aba^2 \\ b^3a^2b^2a^2ba \approx b^3a^2b^2a^4 \\ a^4b^2a^2ba \approx b^2a^4 \end{cases}$$

Remarquez que dans ce système seulement une égalité n'est pas fermée.
Remarque : $s =_E t$ est un analogue de $E \models (s = t)$ dans la logique du 1^{er} ordre. Pour les théories du $1^e r$ ordre il est souvent intéressant de définir et d'essayer d'axiomatiser la théorie d'un modèle particulier.

Exemple 14. *Théorie PA des piles altérnables :*

$$\begin{cases} top(push(x, y)) = x \\ pop(push(x, y)) = y \\ alternate(\epsilon, z) = z \\ alternate(push(x, y), z) = push(x, alternate(z, y)) \end{cases}$$

E.g., on peut prouver

$$PA \models alternate(push(top(push(0, \epsilon)), \epsilon),\ pop(push(succ(0), \epsilon))) = push(0, \epsilon).$$

Cette égalité est vraie dans tous les modèles de PA, entre autres, dans le modèle dont le domaine consiste des piles de la forme

$$push(\lceil n_1 \rceil, push(\lceil n_2 \rceil, ..., push(\lceil n_k \rceil, \epsilon)\ ...)), \quad k \geq 0,$$

où $\lceil n_i \rceil$ sont les nombres naturels : $0, succ(0), ...$.

Remarquons que ce modèle est exactement l'algèbre initiale $\mathcal{T}_{PA}[\emptyset]$. Cet exemple explique l'intérêt des théories des modèles initiaux pour les spécification équationnelles :

Définition 14. *Soit E une TE sur Σ, V et $A_0 \models E$ un de ses modèles. Alors la* **théorie de ce modèle** *est $th(A_0) = \{s \approx t \mid A_0 \models s \approx t\}$. La théorie $th(\mathcal{T}_\Sigma/_{=_E})$ du modèle initial $\mathcal{T}_\Sigma/_{=_E}$ de E s'appele* **théorie inductive** *de E (notée $ind(E)$).*

Remarque : $th(E) \subseteq ind(E)$ pour tout TE E. Pourtant, en règle générale, $ind(E) \supsetneq th(E)$.

Exemple 15. *Dans la théorie inductive $ind(PA)$ on peut prouver pour tout terme t_0 que si $ind(PA) \models alternate(t_0, u)$, alors*
(i) $ind(PA) \models t_0 \approx push(s_1, push(s_2, ...push(s_k, \epsilon)...))$
pour certains $s_1, ..., s_k$, et aussi :
(ii) $ind(PA) \models alternate(y, \epsilon) \approx y$
pour tout terme t de la forme (i). Si on passe à un autre modèle de PA, où on a, e.g., une autre pile vide $\epsilon_0 \not\approx \epsilon$, et la spécification :

$$alternate(\epsilon_0, \epsilon) \approx \epsilon$$

est vraie, alors dans la théorie inductive de ce modèle

$$ind(PA + \{alternate(\epsilon_0, \epsilon) \approx \epsilon\})$$

on ne peut plus prouver $alternate(t, \epsilon) \approx \epsilon$ (sinon $\epsilon_0 \approx \epsilon$) :

$$ind(PA + \{alternate(\epsilon_0, \epsilon) \approx \epsilon\}) \not\models alternate(y, \epsilon) \approx y.$$

Ainsi

$$alternate(y, \epsilon_0) \approx y \in ind(PA) - th(PA).$$

Les théories inductives sont plus complexes que les TE :

Théorème 3. *Il existe des théories inductives $ind(E)$ non énumerables même pour une TE E finie.*

3 Théories équationnelles fermées

Les TE fermées $th(E)$ c'est-à-dire les TE E fermées) sont décidables dans le sens que $s =_E t$ est décidable pour tous les termes fermées s, t.
Comme c'est dit ci-dessus, $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ est la congruence minimale fermée par substitutions. Pourtant, si E est fermée, alors les substitutions ne changent pas les égalités. Ainsi, dans ce cas particulier, $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ est l'équivalence minimale fermée par Σ-opérations. Essayons de la calculer.

Notation : $R(E) =_{df} \{(t, t) \mid t \in T_\Sigma[V]\}$
$S(E) =_{df} \{(t, s) \mid (s, t) \in E\}$
$T(E) =_{df} \{(s, u) \mid (s, t), (t, u) \in E\}$
$C(E) =_{df} \{(f(\overline{s}), f(\overline{t})) \mid f/n \in \Sigma, s_i \approx t_i \in E, s_i \in \overline{s}, t_i \in \overline{t}\}$

$$\text{et} \quad CC(E) =_{df} E \cup R(E) \cup S(E) \cup T(E) \cup C(E).$$

L'opérateur $CC : 2^{(T_\Sigma[V])^2} \to 2^{(T_\Sigma[V])^2}$ est monotone, c.-à-d. $E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow CC(E_1) \subseteq CC(E_2)$. Alors, selon le théorème de Kleene des points fixes :

$$\overset{*}{\leftrightarrow}_E \equiv =_E = \bigcup_{i=0}^{\infty} CC^i(E), \quad où$$

$$\begin{cases} CC^0(E) = \emptyset \quad et \\ CC^{i+1}(E) = CC(CC^i(E)). \end{cases}$$

Notons $\bigcup_{i=0}^{\infty} CC^i(E) =_{df} CC^\omega(E)$.
Malheuresement, $CC^\omega(E)$ est infini même si E est finie et fermée :

Exemple 16. *$\Sigma = \{f/1, a, b\}$, $E_0 = \{a \approx b\}$. Alors pour tout $i \geq 0$, $f^i(a) \approx f^i(b) \in CC^\omega(E_0)$, où $f^i(x) = f(...f(x\underbrace{)...)}_{i}$. Pourtant, pour résoudre le problème d'égalité "$s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t$", il suffit de se limiter aux termes dont les sous-termes* **sont présents dans** E **ou dans** s, t.

Notation :

$$\begin{cases} sous-trm(t) =_{df} \{t/p \mid p \in O(t)\} \\ sous-trm(t \approx s) =_{df} sous-trm(t) \cup sous-trm(s) \\ sous-trm(E) =_{df} \bigcup_{e \in E} sous-trm(e) \\ sous-trm(s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t) =_{df} sous-trm(s \approx t) \cup sous-trm(E) \end{cases}$$

Exemple 17. Prob *: $E = \{a \approx b\}$, $(s \approx t) \equiv (f(a) \approx b)$. Alors $sous-trm(\mathsf{Prob}) = \{a, b, f(a)\}$.*

Nous allons restreindre notre $CC^\omega(E)$ à $sous-trm(E)$:

$$\begin{cases} H^0 =_{df} E \\ H^{i+1} =_{df} CC(H^i) \cap (S(P) \times S(P)), \quad où \quad P = s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t \quad et \end{cases}$$

$$S(P) =_{df} sous-trm(s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t).$$

Cet opérateur monotone a le point fixe $CC_H(P)$ fini et borné :

$$CC_H(P) \subseteq CC^\omega(P) \cap (S(P) \times S(P)),$$

où

$$CC^\omega(P) = CC^\omega(s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t).$$

On peut prouver le théorème suivant :

Théorème 4. *Pour tout problème d'égalité fermé $P : s \overset{*}{\leftrightarrow}_E t$,*

$$CC_H(P) = (=_E) \cap (S(P) \times S(P)).$$

Corollaire 3. *P : $s \approx_E t$ ssi $(s,t) \in CC_H(P)$, pour P fermé.*

Ce théorème donne un algorithme polynomial de décision du problème d'égalité pour les systèmes fermés des égalités l'opérateur du PF a la complexité $O(n^2)$).

Exemple 18. *$\Sigma = \{f,a\}, E = \{f^3(a) \approx a, f^2(a) \approx a\}$. Ainsi $S = \{f^i(a) \mid 0 \leq i \leq 3\}$. Pour $s,t \in S$, $CC_H(P)$ est calculé en trois pas :*
$H_0 = \{f^3(a) \approx a, f^2(a) \approx a\}$
$H_1 = H_0 \cup \{a \approx f^3(a), a \approx f^2(a), f^3(a) \approx f(a), \approx \ r\hat{e}flexives\}$
$H_2 = H_1 \cup \{f(a) \approx f^3(a), f^3(a) \approx f^2(a), f^2(a) \approx f^3(a), a \approx f(a)\}$
$H_3 = H_2 \cup \{f(a) \approx a, f(a) \approx f^2(a), f^2(a) \approx f(a)\}$ *: le PF.*$\Box$

4 Problèmes de satisfaisabilité

Il y a deux cas décidables intéressants :

Unification : C'est le cas $\emptyset \models s \approx t$ E est vide), où $s,t \in T_\Sigma[V]$.

Exemple : $f(a,Y,h(Y,Y),U) \approx f(X,h(X,X),Z,h(Z,Z))$. ($\sigma =?$)

Filtrage : encore plus particulier : $\emptyset \models s \approx t$, où t est fermé.

Complexité : **Unification :** $O(\mid t \mid, \mid s \mid, \mid \sigma \mid)$. Sinon, $\mid \sigma \mid = 2^{|t|+|s|}$ dans le pire des cas.
Filtrage : $O(\mid t \mid + \mid s \mid)$.