

Cours 3. Fondements de la théorie Lambda

Les questions à répondre dans ce cours :

Q_1 : [cohérence de λ] : Y-a-t-il M, N tel que $\lambda \rightarrow M = N$?

Q_2 : [fonctionnalité de β - conversion] : $M =_\lambda N_1 \wedge M =_\lambda N_2 \rightarrow N_1 \equiv N_2$?

1 Propriétés des réductions

Soit une relation binaire R sur les Lambda-termes ($R \subseteq \Lambda \times \Lambda$) qui est conforme avec λ . Rappel :

- (i) $(M_1, M_2) \in R \rightarrow (ZM_1, ZM_2) \in R$
- (ii) $(M_1, M_2) \in R \rightarrow (M_1Z, M_2Z) \in R$
- (iii) $(M_1, M_2) \in R \rightarrow (\lambda x. M_1, \lambda x. M_2) \in R$.

Exemple 1. \equiv et \rightarrow_β sont conformes avec λ .

Rappel : $M \rightarrow_R N =_{df} (M, N) \in R$

Proposition 1. R est conforme avec λ ssi $M_1 \rightarrow_R M_2$ implique $C[M_1] \rightarrow_R C[M_2]$ pour tout contexte $C[]$.

Preuve : Par définition. \square

Rappel : R -réduction \rightarrow_R est la fermeture de R par renommage (\equiv) : Ax. (α) et par transitivité : Ax. (e_3).

Remarque : La fermeture par \equiv implique la réflexivité (Ax. (e_2)).

Lemme 1. $M \rightarrow_R N$ s'il existent $C[]$ et $P, Q \in \Lambda$ tel que

$$M \equiv C[P], N \equiv C[Q] \text{ et } P \rightarrow_R Q.$$

Preuve : Par la Proposition 1. \square

Lemme 2. $M \rightarrow_R N$ implique $M_0[x := M] \rightarrow_R M_0[x := N]$ pour tous M_0, M, N .

Preuve : Par la Proposition 1. \square

Définition 1. Soit une relation \rightarrow_R . Un terme $M \in \Lambda$ est en **forme normale R** (R -FN), si $M \rightarrow_R N$ pour aucun Lambda-terme N . Si $M \equiv C[P]$ et $P \rightarrow_R Q$ pour un $Q \in \Lambda$, alors P est un R -rédex de M .

Corollaire 1. Si M est une R -FN, alors

- (1) $M \rightarrow_R N$ pour aucun $N \in \Lambda$;
- (2) $M \twoheadrightarrow_R N \implies M \equiv N$.

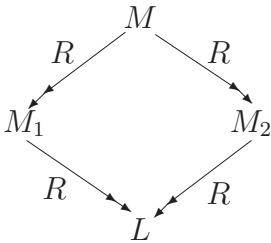
Preuve : Par le Lemme 1.

Définition 2. Soit une relation \rightarrow_R .

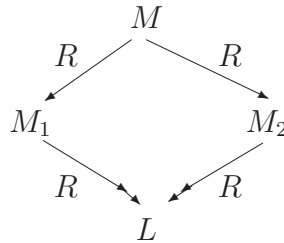
- (1) Une paire de termes M, N est **convergente** (noté : $M \downarrow_R N$), si $M \twoheadrightarrow_R L \leftarrow_R N$ pour un terme L . (On écrit $M \downarrow N$ si R est fixé).
- (2) \rightarrow_R est **confluente** (a la propriété de losange) si $M_1 \leftarrow_R M \rightarrow_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2$.
 \rightarrow_R est **faiblement confluente**, si $M_1 \leftarrow_R M \rightarrow_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2$.
- (3) \rightarrow_R a la **propriété de Church-Rosser (CR)**, si $M_1 \leftarrow_R^* M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2$.

Voici la différence entre la confluence et la confluence faible :

Confluence :



Confluence faible :



Ainsi, si \rightarrow_R est confluente, alors elle est aussi faiblement confluente.

Définition 3. \rightarrow_R est **terminale** (ou **noethérienne**) s'il n'existe aucune réduction infinie :

$$M_1 \rightarrow_R M_2 \rightarrow_R \dots$$

Par exemple, \rightarrow_β n'est pas terminale : $\Omega \rightarrow_\beta \Omega \rightarrow_\beta \dots$

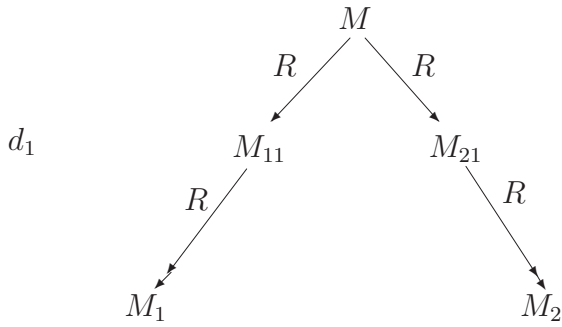
Théorème 1. [Newman] Si \rightarrow_R est terminale et faiblement confluente, alors elle est confluente.

Preuve : \rightarrow_R étant terminale, le diagramme de transitions \rightarrow_R n'a pas de boucle. Ainsi, \rightarrow_R est un ordre partiel. Nous prouvons par induction sur cet ordre la proposition :

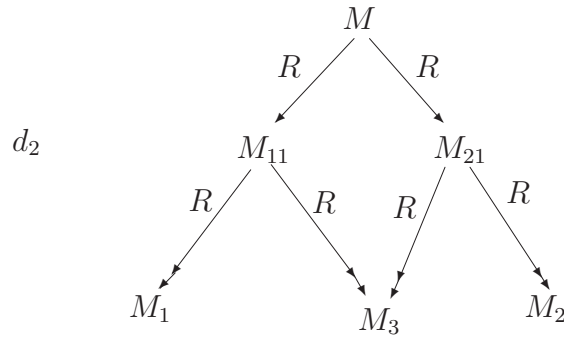
$$M_1 \leftarrow_R M \rightarrow_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2.$$

Base. Si M est \rightarrow_R -minimal, alors il est R -FN et selon le Corollaire 1 $M_1 \leftarrow_R M \rightarrow_R M_2 \implies M_1 \equiv M_2$ et $L =_{df} M$.

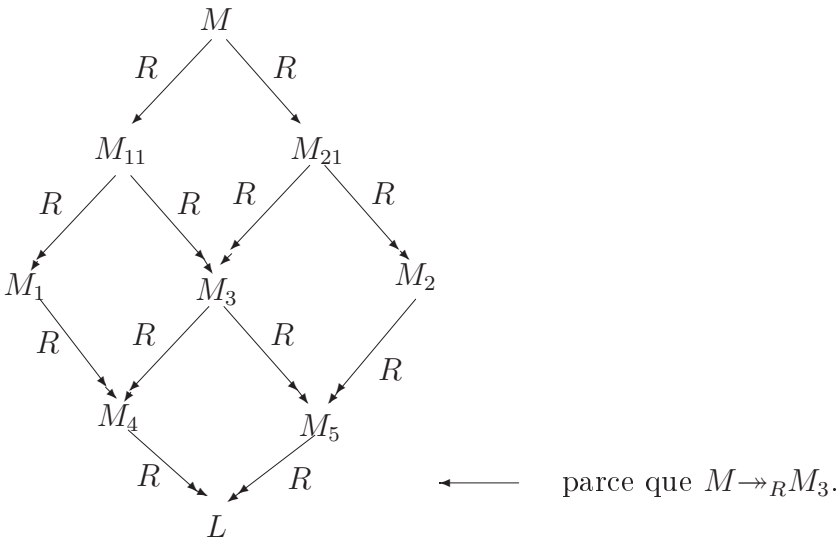
Pas d'induction. Soit la proposition vraie pour tous les termes précédant M dans l'ordre \rightarrow_R . M n'est pas R -FN. Alors $M_1 \leftarrow_R M \rightarrow_R M_2$ veut dire qu'il existent des réductions



\rightarrow_R étant faiblement confluente, ce diagramme peut être complété :



Par ailleurs, M_{11}, M_{21} précèdent M . Donc ils vérifient la proposition.
Par récurrence, on peut compléter le diagramme d_2 :



□.

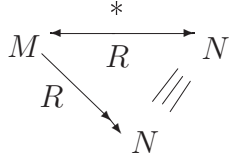
Corollaire 2. *La confluence est équivalente à la confluence faible pour toute relation \rightarrow_R terminale.*

Théorème 2. \rightarrow_R est confluente ssi \rightarrow_R est CR.

Preuve : (1) Soit \rightarrow_R confluente. Prouvons qu'elle est CR.

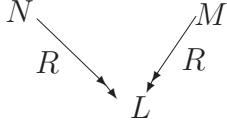
Supposons que $M \leftarrow_R^* N$. Prouvons $M \downarrow_R N$ par récurrence sur la définition de \leftarrow_R^* .

(3.1) Si $M \leftarrow_R^* N$ parce que $M \rightarrow_R N$, alors :



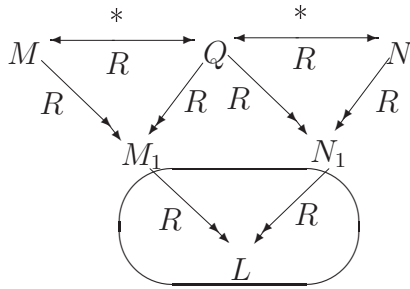
et $N \equiv N \implies N \twoheadrightarrow_R N$.

(3.2) Si $M \leftarrow_R^* N$ parce que $N \leftarrow_R^* M$ et $N \downarrow_R M$ (par récurrence), alors :



et on utilise le même L .

(3.3) Si $M \leftarrow_R^* N$ parce que $M \leftarrow_R^* Q \leftarrow_R N$ et (par récurrence) $M \leftarrow_R^* Q \leftarrow_R^* N$, alors :



cette complétion est effectuée
par confluence

(2) Soit $\rightarrow_R CR$ et $M_1 \leftarrow_R M_0 \twoheadrightarrow_R M_2$. Alors, $M_1 \leftarrow_R^* M_2$ et $M_1 \downarrow_R M$ selon CR. \square

Corollaire 3. Soit \rightarrow_R confluente. Alors,

(i) Si $M \leftarrow_R^* N$ et N est R -FN, alors $M \twoheadrightarrow_R N$.

(ii) Si $N_1 \leftarrow_R^* M \leftarrow_R^* N_2$ et N_1, N_2 sont R -FN, alors $N_1 \equiv N_2$.

Preuve : Par Théorème 2 et Corollaire 1.

2 Confluence de \rightarrow_β et cohérence de λ

Proposition 2. $\lambda \models M = N$ ssi $M \leftarrow_\beta^* N$.

Evident. \square

Proposition 3. \rightarrow_R est confluente ssi \rightarrow_β l'est aussi.

Evident. \square

Selon la Proposition 3, pour prouver que \rightarrow_β est confluente, il suffit de le prouver pour une relation intermédiaire \rightarrow_I telle que

$$\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_I \subseteq \twoheadrightarrow_\beta.$$

Par exemple, on peut prendre la fermeture de \rightarrow_β par \equiv :

$$(4.1) \quad M \equiv N \implies M \rightarrow_I N$$

$$(4.2) \quad M \rightarrow_I N \implies \lambda x. M \rightarrow_I \lambda x. N$$

$$(4.3) \quad M \rightarrow_I N, M' \rightarrow_I N' \implies MM' \rightarrow_I NN'$$

$$(4.4) \quad M \rightarrow_I N, M' \rightarrow_I N' \implies (\lambda x. M)M' \rightarrow_I N[x := N']$$

Ainsi, \rightarrow_I n'est ni symétrique, ni transitive. Pourtant

$$\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_I \subseteq \rightarrow_\beta$$

et \rightarrow_β est la fermeture transitive de \rightarrow_I . En particulier, $\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_I$ est impliqué par les propriétés de la substitution du cours précédent.

Au lieu de prouver le théorème fondamental de Church et Rosser :

Théorème 3. \rightarrow_R est confluente [Church, Rosser].

nous citons deux lemmes utilisés dans sa preuve qui expliquent son idée :

Lemme 3. $M \rightarrow_I M', N \rightarrow_I N' \implies M[x := N] \rightarrow_I M'[x := N']$.

Preuve : Par récurrence sur (4.1)-(4.4). \square

Lemme 4. (1) $(\lambda x. M) \rightarrow_I N \implies N \equiv \lambda x. M'$, où $M \rightarrow_I M'$.

(2) $MN \rightarrow_I L$ implique

soit (2.1) $L \equiv M'N'$, où $M \rightarrow_I M'$ et $N \rightarrow_I N'$,

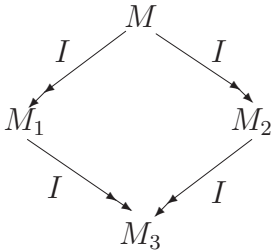
soit (2.2) $M \equiv \lambda x. P$ et $L \equiv P'[x := N']$, où $P \rightarrow_I P'$ et $N \rightarrow_I N'$.

Preuve : Par récurrence sur (4.1)-(4.4). \square

Pour prouver le théorème 3.3 de Church et Rosser, on suppose que

$$M_1 \leftarrow_I M \rightarrow_I M_2,$$

et on prouve que dans ce cas il existe un terme M_3 tel que



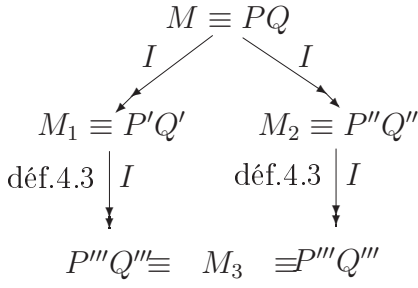
(par récurrence double sur la définition de M et sur les points (4.1)-(4.4) de définition de \rightarrow_I).

Fragment de preuve :

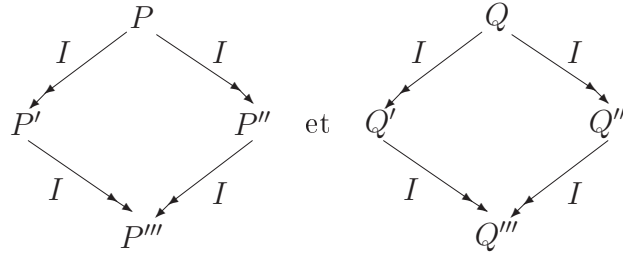
Le cas où $M \equiv PQ$ et où $M \rightarrow_I M_1$ est vrai parce que $M \equiv PQ \rightarrow_I M_1 \equiv P'Q'$ et $P \rightarrow_I P'$, $Q \rightarrow_I Q'$ (le cas 4.3).

Selon le Lemme 4 :

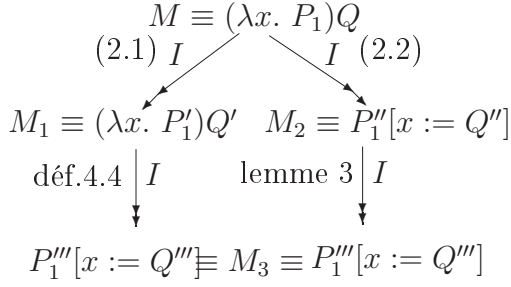
dans le cas (2.1) nous avons :



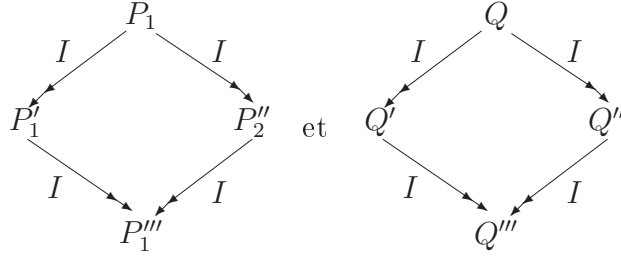
Parce que par récurrence :



dans le cas (2.2) nous avons :



Parce que par récurrence :



□

Corollaire 4. (i) Si M a une FN N (c.-à-d. $\lambda \models M = N$), alors $M \rightarrow_\beta N$.
(ii) Si N est une FN de M , alors elle est unique, un isomorphisme près.

Preuve : (i) $\lambda \models M = N \implies M \overset{*}{\leftarrow}_\beta N \implies M \downarrow_\beta N \implies M \rightarrow_\beta N$ (Corollaire 3).
(ii) $N \leftarrow_\beta M \rightarrow_\beta N' \implies N \downarrow_\beta N' \implies N \equiv N'$ (car N est FN).

Corollaire 5. λ est cohérente.

Preuve : Soit $N_1 \not\equiv N_2$ deux FN. Si $\lambda \models N_1 = N_2$, alors $N_1 \overset{*}{\leftarrow}_\beta N_2$ et $N_1 \downarrow_\beta N_2$. d'où $N_1 \equiv N_2$. Contradiction.

Exemple 2. Soient deux nombres différents de Barendregt : $[i] \neq [j]$. Alors $\lambda \not\models [i] = [j]$.

Corollaire 6. Le terme Ω n'a pas de FN.

Preuve : Supposons $\lambda \models \Omega = N$, où N est FN. Alors, selon corollaire 3.3, $\Omega \rightarrow_\beta N$. Mais ceci n'est pas possible, car Ω a un seul rédex Ω et $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$. Pourtant, Ω lui même n'est pas FN.

3 Lambda-théories

Définition 4. Une Lambda-théorie $\lambda + \mathcal{T} =_{df} \lambda \cup \mathcal{T}$ où \mathcal{T} est un ensemble d'égalités $M = N$, $M, N \in \Lambda$.

Exemple 3. $\eta : \lambda x. Mx = M$, où $x \notin FV(M)$ (η -conversion). Alors $\lambda + \eta$ est une Lambda-théorie.

Exemple 4. ext : $Mx = Nx \implies M = N$, où $x \notin FV(MN)$ (**extensionnalité**).
 Dans ce cas $\lambda + \mathbf{ext}$ est l'ensemble minimal qui contient λ et qui contient l'égalité $M = N$ pour toute égalité $Mx = Nx$, où $x \notin FV(MN)$.

On peut comparer les deux Lambda-théories par l'expressivité :

Définition 5. $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_2$ veut dire que les deux théories sont **équivalentes** dans le sens que :

$$\lambda + \mathcal{T}_1 \models M = N \text{ ssi } \lambda + \mathcal{T}_2 \models M = N.$$

Théorème 4. [Curri] $\eta \equiv \mathbf{ext}$.

Preuve : (\implies) Soit $Mx = Nx$ et $x \notin FV(MN)$. Alors

$$Mx = Nx$$

$$\lambda x. Mx = \lambda x. Nx \quad (c_3) \quad \lambda x. Mx = M \quad (\eta) \quad \lambda x. Nx = N \quad (\eta)$$

$$M = N \quad (e_3)$$

ext

(\impliedby) Soit un terme M et $x \notin FV(MN)$. Alors

$$(\lambda x. Mx)x = Mx[x := x] = Mx \quad (ext)$$

$$\lambda x. Mx = M$$

□ η

Remarque : λ est cohérente mais $\lambda + \mathcal{T}$, théoriquement, risque devenir non cohérente.

Notation : $Coh(\mathcal{T})$ veut dire que $\lambda + \mathcal{T}$ est cohérente.

Par exemple, il faut vérifier $Coh(ext)$ ($\equiv Coh(\eta)$).

Définition 6. Deux Lambda-termes M, N sont **non comparables** dans \mathcal{T} (notation : $M \#_{\mathcal{T}} N$), si $\neg Coh(\lambda + \mathcal{T} + \{M = N\})$.

Exemple 5. $\mathbf{K} \#_{\mathbf{S}}$ (c.-à-d. $\neg Coh(\lambda + \{\mathbf{K} = \mathbf{S}\})$) :

$$\underline{\mathbf{K} = \mathbf{S} \quad (c_1)}$$

$$\underline{\mathbf{KXYZ} = \mathbf{SXYZ}}$$

$$\underline{XZ = XZ(YZ) \quad (\text{si } X \equiv Z \equiv \mathbf{I})}$$

$$\underline{\mathbf{I} = \mathbf{YI} \quad (\text{si on choisit } Y \equiv \mathbf{KM})}$$

$$\underline{\mathbf{I} = M \quad (\text{si on choisit } Y \equiv \mathbf{KN})}$$

$$\underline{\mathbf{I} = N \quad (e_3)}$$

$$\underline{M = N}$$

$$\neg \text{Coh}(\lambda + \{\mathbf{K} = \mathbf{S}\})$$

Remarque : Dans la théorie η la notion de la FN est changée par rapport à λ :

Définition 7. Un η -**rédex** est soit de la forme $(\lambda x. M)N$, soit de la forme $\lambda x. Mx$, où $x \notin FV(M)$. Alors un terme est en η -**FN** s'il ne contient aucun η -rédex. Un terme M a une η -**FN** si $\lambda + \eta \models M = N$ pour un terme N en η -FN.

Exemple 6. (1) $\mathbf{K}, \mathbf{S}, [i]$ sont η -FN.

(2) $\lambda x. x(\lambda z. xz)$ n'est pas η -FN ($\lambda z. xz$ est η -rédex), mais $\lambda + \eta \models \lambda x. x(\lambda z. xz) = \lambda x. xx$, et $\lambda x. xx$ est η -FN.

Théorème 5. [Curri] M a η -FN ssi M a FN.

Corollaire 7. Ω n'a pas de η -FN dans η .

Théorème 6. [Church – Rosser] $\rightarrow_{\beta\eta}$ est confluente.

Corollaire 8. (i) Si M a une η -FN N , alors $M \rightarrow_{\beta\eta} N$.

(ii) Chaque terme a au plus une η -FN.

(iii) $\text{Coh}(\eta)$.

Par ailleurs, η est une extension cohérente maximale de λ dans un sens.

Définition 8. Une Lambda-théorie σ est **complète dans le sens de Hilbert-Post (HP-complète)** si pour tous $M, N \in \Lambda$:

soit $\lambda + \mathcal{T} \models M = N$, soit $\neg \text{Coh}(\mathcal{T} + \{M = N\})$.

Théorème 7. [Bohm] Soient $M \not\equiv N$ deux η -FN. Alors $M \#_{\eta} N$.

Corollaire 9. η est HP-complète par rapport aux termes qui ont une η -FN, c.-à-d. : si M, N ont des η -FN, alors

soit $\lambda + \eta \models M = N$, soit $\neg \text{Coh}(\eta + \{M = N\})$.

4 Extension par des fonctions intégrées

Étendons la théorie λ par constantes \mathcal{C} . C'est-à-dire, les Lambda-termes sont définis à partir des variables \mathcal{V} et des constantes \mathcal{C} . Étant donnée une fonction $f : (\Lambda)^k \rightarrow \Lambda$, calculée par un algorithme "extérieur" (par exemple, programmée en C++), on sélectionne une nouvelle constante $\delta_f \in \mathcal{C}$ et on étend λ par les règles de réduction suivantes :

$$\delta_f M_1 \dots M_k \rightarrow_{\delta} f(M_1, \dots, M_k) \text{ pour tous } M_1, \dots, M_k \in \Lambda.$$

De cette manière, $\delta_f M_1 \dots M_k$ devient un δ -**rédex** et nous obtenons dans l'extension $\lambda + \delta$ une nouvelle δ -FN.

Exemple 7. *On choisit les constantes :*

true, false, not, and, ite (pour "if...then...else")

et introduit les δ -réductions suivantes :

not true \rightarrow **false**
not false \rightarrow **true**
and true true \rightarrow **true**
and true false \rightarrow **false**
and false true \rightarrow **false**
and false false \rightarrow **false**
ite true \rightarrow **T** $\equiv \lambda xy. x$
ite false \rightarrow **F** $\equiv \lambda xy. y$

Avec ces réductions on obtient :

ite true $MN \rightarrow_{\beta\delta} \mathbf{T}MN \rightarrow_{\beta} M$
ite false $MN \rightarrow_{\beta\delta} \mathbf{F}MN \rightarrow_{\beta} N$

De cette manière on peut étendre λ par l'arithmétique : par exemple, on peut introduire les entiers $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ et introduire les opérations **plus**, **minus**, **times**, **divide**, **equal**, **error** et les δ -réductions correspondantes :

plus $ij \rightarrow i + j$
divide $ij \rightarrow i/j$, si $j \neq 0$, et
divide $i0 \rightarrow \mathbf{error}$
plus $i \mathbf{error} \rightarrow \mathbf{error}, \dots$ etc.

Théorème 8. [Mitschke] *Pour toute fonction f intégrée, la réduction $\rightarrow_{\beta\delta_f}$ est CR, et donc $\beta + \delta_f$ est cohérente.*

Corollaire 10. *Si $M \rightarrow_{\beta\delta} N$ et N_0 est une δ -FN de N , alors $M \rightarrow_{\iota\beta\delta} N_0$, où $\rightarrow_{\iota\beta\delta}$ est la réduction $\beta\delta$ gauche : à chaque pas le redex gauche est réduit.*

Pour transformer $\lambda + \delta$ en un langage de programmation fonctionnelle il reste d'adapter sa syntaxe :

Exemple 8. (1) **Let** $x = M$ **in** E correspond à :
 $(\lambda x. E)M$ ou bien à $E[x := M]$

(2) **Letrec** $f\bar{x} = C[f, \bar{x}]$ **in** E correspond à :
Let $f = \Theta(\lambda f\bar{x}. C[f, \bar{x}])$ **in** E , c'est-à-dire à :
 $(\lambda f. E)(\Theta(\lambda f\bar{x}. C[f, \bar{x}]))$,

où Θ est un autre combinateur de point fixe qui a la propriété $\Theta M \rightarrow_{\beta} M(\Theta M)$.

Remarque : Le combinateur de Church \mathbf{Y} a une propriété plus faible : $\lambda \models \mathbf{Y}M = M(\mathbf{Y}M)$, c'est-à-dire $\mathbf{Y}M \leftarrow_{\beta}^* M(\mathbf{Y}M)$.

Théorème 9. [Turing] Soit $\Theta \equiv AA$, où $A \equiv \lambda xy. y(xxy)$. Alors

$$\Theta M \rightarrow_{\beta} M(\Theta M) \text{ pour tout } M \in \Lambda.$$

De cette manière, on transforme λ en MIRANDA, CAML et autres.

5 Sémantique dénotationnelle de λ

5.1 Lambda-calcul typé

Types : $T := T_0 \mid T \rightarrow T$, où T_0 est un ensemble de types **primitifs**

Variables : V^{τ} pour tout $\tau \in T$ ($V^{\tau_1} \cap V^{\tau_2} = \emptyset$, $\tau_1 \neq \tau_2$)

Constantes : C^{τ} pour tout $\tau \in T$ (le même)

Termes :

(i) $V^{\tau} \cup C^{\tau} \subset \mathcal{T}^{\tau}$

(ii) $\frac{t_1 \in \mathcal{T}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2}, t_2 \in \mathcal{T}^{\tau_1}}{t_1 t_2 \in \mathcal{T}^{\tau_2}}$

(iii) $\frac{v \in V^{\tau_1}, t \in \mathcal{T}^{\tau_2}}{\lambda v. t \in \mathcal{T}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2}}$

Remarque : On renomme les variables liées en préservant leur types.

5.2 Modèle du Lambda-calcul typé

$\tau \in T_0$ étant un **type primitif**, soit $\mathcal{D}^{\tau} \neq \emptyset$ un **domaine**.

Alors, nous allons définir :

$$\mathcal{D}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2} =_{df} (\mathcal{D}^{\tau_2})^{\mathcal{D}^{\tau_1}} \quad (\text{fonctions totales} : \mathcal{D}^{\tau_1} \rightarrow \mathcal{D}^{\tau_2})$$

Une **valuation** est une substitution Θ telle que

$$\Theta(v) \in \mathcal{D}^{\tau}, \text{ si } v \in \mathcal{V}^{\tau}.$$

Un **modèle** \mathcal{M} de Lambda calcul type est $\mathcal{M} = ((\mathcal{D}^{\tau})_{\tau \in T}, \|\circ\|)$, où pour une valuation Θ donnée :

(i) $\|v\|_{\mathcal{M}}^{\Theta} = \Theta(v)$ pour $v \in \mathcal{V}^{\tau}, \tau \in T$

(ii) $\|c\|_{\mathcal{M}}^{\Theta} \in \mathcal{D}^{\tau}$, si $c \in \mathcal{C}^{\tau}$

(iii) $\|t_1 t_2\|_{\mathcal{M}}^{\Theta} = \|t_1\|_{\mathcal{M}}^{\Theta} (\|t_2\|_{\mathcal{M}}^{\Theta})$, si $t_1 \in \mathcal{T}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2}$ et $t_2 \in \mathcal{T}^{\tau_1}$

(iv) $\|\lambda v. t\|_{\mathcal{M}}^{\Theta} = f \in (\mathcal{D}^{\tau_2})^{\mathcal{D}^{\tau_1}}$, si $v \in \mathcal{V}^{\tau_1}, t \in \mathcal{T}^{\tau_2}$,

$$\text{et } f(d) = \| t \|_{\mathcal{M}}^{\Theta'}, \quad \text{où } \Theta'(z) = \begin{cases} d, & \text{si } z = v \\ \Theta(z), & \text{si } z \neq v \end{cases}$$

pour tout $d \in \mathcal{D}^{\tau}$.

Théorème 10. $\| t \|_{\mathcal{M}}^{\Theta} \in \mathcal{D}^{\tau}$ pour tout terme $t \in \mathcal{T}^{\tau}$ et toute valuation Θ .

5.3 Modèle du Lambda-calcul

Le problème avec un modèle pour Lambda-calcul non-typé est qu'il faut que $D \cong D^D$ (D isomorphe à D^D) soit vrai pour le domaine D de ce modèle. Ceci est impossible pour les raisons de cardinalité. D. Scott a trouvé une solution : il a limité D aux sous-ensembles des fonctions *continues* sur D muni d'une topologie naturelle. Il a construit dans une catégorie des espaces topologiques cartesiens sur les treillis complets un ensemble des fonctions continues $D_0 \cong D_0^{D_0}$. On peut trouver sa construction dans le livre de Barendregt cité.