Alexandre DIKOVSKY
Université de Nantes

Lambda-calcul et Systèmes de Réécriture

Cours 3. Fondements de la théorie Lambda

Les questions à répondre dans ce cours :
Q_1 : [cohérence de λ] : Y-a-t-il M, N tel que $\lambda \rightarrow\!\!\!\!\rightarrow M = N$?
Q_2 : [fonctionnalité de $\beta - conversion$] : $M =_\lambda N_1 \wedge M =_\lambda N_2 \rightarrow N_1 \equiv N_2$?

1 Propriétés des réductions

Soit une relation binaire R sur les Lambda-termes ($R \subseteq \Lambda \times \Lambda$) qui est conforme avec λ. Rappel :
(i) $(M_1, M_2) \in R \rightarrow (ZM_1, ZM_2) \in R$
(ii) $(M_1, M_2) \in R \rightarrow (M_1 Z, M_2 Z) \in R$
(iii) $(M_1, M_2) \in R \rightarrow (\lambda x.\ M_1, \lambda x.\ M_2) \in R$.

Exemple 1. $\equiv$ *et* $\twoheadrightarrow_\beta$ *sont conformes avec* λ.

Rappel : $M \rightarrow_R N =_{df} (M, N) \in R$

Proposition 1. *R est conforme avec λ ssi $M_1 \rightarrow_R M_2$ implique $C[M_1] \rightarrow_R C[M_2]$ pour tout contexte $C[\ ]$.*
Preuve : Par définition.□

Rappel : R-réduction $\twoheadrightarrow_R$ est la fermeture de R par renommage ($\equiv$) : Ax. (α) et par transitivité : Ax. (e_3).

Remarque : La fermeture par $\equiv$ implique la réflexivité (Ax. (e_2)).

Lemme 1. *$M \rightarrow_R N$ ss'il existent $C[\ ]$ et $P, Q \in \Lambda$ tel que*

$$M \equiv C[P],\ N \equiv C[Q] \text{ et } P \rightarrow_R Q.$$

Preuve : Par la Proposition 1.□

Lemme 2. *$M \twoheadrightarrow_R N$ implique $M_0[x := M] \twoheadrightarrow_R M_0[x := N]$ pour tous M_0, M, N.*
Preuve : Par la Proposition 1.□

Définition 1. *Soit une relation $\rightarrow_R$. Un terme $M \in \Lambda$ est en* **forme normale** *R ($R{-}FN$), si $M \rightarrow_R N$ pour aucun Lambda-terme N. Si $M \equiv C[P]$ et $P \rightarrow_R Q$ pour un $Q \in \Lambda$, alors P est un R−rédex de M.*

Corollaire 1. *Si M est une R-FN, alors*

(1) $\quad M \not\to_R N \quad$ *pour aucun* $N \in \Lambda$;

(2) $\quad M \twoheadrightarrow_R N \implies M \equiv N$.

Preuve : Par le Lemme 1.

Définition 2. *Soit une relation* $\to_R$.

(1) Une paire de termes M, N *est* **convergente** *(noté :* $M \downarrow_R N$*), si* $M \twoheadrightarrow_R L \twoheadleftarrow_R N$ *pour un terme* L. *(On écrit* $M \downarrow N$ *si* R *est fixé).*

(2) $\to_R$ *est* **confluente** *(a la propriété de losange) si* $M_1 \twoheadleftarrow_R M \twoheadrightarrow_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2$.

$\to_R$ *est* **faiblement confluente**, *si* $M_1 \leftarrow_R M \to_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2$.

(3) $\to_R$ *a la* **propriété de Church-Rosser (CR)**, *si* $M_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2$.

Voici la différence entre la confluence et la confluence faible :

Confluence :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, two heads, "R"'] \arrow[dr, two heads, "R"] & \\
M_1 \arrow[dr, two heads, "R"'] & & M_2 \arrow[dl, two heads, "R"] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

Confluence faible :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
M_1 \arrow[dr, two heads, "R"'] & & M_2 \arrow[dl, two heads, "R"] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $\to_R$ est confluente, alors elle est aussi faiblement confluente.

Définition 3. $\to_R$ *est* **terminale** *(ou* **noethérienne***) s'il n'existe aucune réduction infinie :*

$$M_1 \to_R M_2 \to_R \ldots \ .$$

Par exemple, $\to_\beta$ n'est pas terminale : $\Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \ldots$

Théorème 1. [*Newman*] *Si* $\to_R$ *est terminale et faiblement confluente, alors elle est confluente.*

Preuve : $\to_R$ étant terminale, le diagramme de transitions $\to_R$ n'a pas de boucle. Ainsi, $\twoheadrightarrow_R$ est un ordre partiel. Nous prouvons par induction sur cet ordre la proposition :

$$M_1 \twoheadleftarrow_R M \twoheadrightarrow_R M_2 \implies M_1 \downarrow_R M_2.$$

Base. Si M est $\to_R$-minimal,alors il est R-FN et selon le Corollaire1 $M_1 \twoheadleftarrow_R M \twoheadrightarrow_R M_2 \implies M_1 \equiv M_2$ *et* $L =_{df} M$.

Pas d'induction. Soit la proposition vraie pour tous les termes précédant M dans l'ordre $\to_R$. M n'est pas R-FN. Alors $M_1 \twoheadleftarrow_R M \twoheadrightarrow_R M_2$ veut dire qu'il existent des réductions

$$d_1 \qquad \begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & \\ & M_{11} \arrow[dl, "R"'] & & M_{21} \arrow[dr, "R"] & \\ M_1 & & & & M_2 \end{tikzcd}$$

$\to_R$ étant faiblement confluente, ce diagramme peut être complété :

$$d_2 \qquad \begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & \\ & M_{11} \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & M_{21} \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ M_1 & & M_3 & & M_2 \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, M_{11}, M_{21} précèdent M. Donc ils vérifient la proposition.
Par récurrence, on peut compléter le diagramme d_2 :

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & \\ & M_{11} \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & M_{21} \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ M_1 \arrow[dr, "R"'] & & M_3 \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & & M_2 \arrow[dl, "R"] \\ & M_4 \arrow[dr, "R"'] & & M_5 \arrow[dl, "R"] & \\ & & L & & \end{tikzcd} \qquad \longleftarrow \quad \text{parce que } M \twoheadrightarrow_R M_3.$$

$\square$.

Corollaire 2. *La confluence est équivalente à la confluence faible pour toute relation* $\to_R$ *terminale.*

Théorème 2. $\to_R$ *est confluente ssi* $\to_R$ *est* CR.

Preuve : (1) Soit $\to_R$ confluente. Prouvons qu'elle est CR.
Supposons que $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R N$. Prouvons $M \downarrow_R N$ par récurrence sur la définition de $\overset{*}{\leftrightarrow}_R$.

(3.1) Si $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R N$ parce que $M \twoheadrightarrow_R N$, alors :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, leftrightarrow, "*", "R"'] \arrow[dr, "R"'] & & N \arrow[dl, phantom, "\equiv"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

et $N \equiv N \Longrightarrow N \twoheadrightarrow_R N$.

(3.2) Si $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R N$ parce que $N \overset{*}{\leftrightarrow}_R M$ et $N \downarrow_R M$ (par récurrence), alors :

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "R"'] & & M \arrow[dl, "R"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

et on utilise le même L.

(3.3) Si $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R N$ parce que $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R Q \twoheadleftarrow_R N$ et (par récurrence) $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R Q \overset{*}{\leftrightarrow}_R N$, alors :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, leftrightarrow, "*", "R"'] \arrow[dr, "R"'] & & Q \arrow[rr, leftrightarrow, "*", "R"'] \arrow[dl, "R"] \arrow[dr, "R"'] & & N \arrow[dl, "R"] \\ & M_1 \arrow[dr, "R"'] & & N_1 \arrow[dl, "R"] & \\ & & L & & \end{tikzcd}$$

cette complétion est effectuée
par confluence

(2) Soit $\rightarrow_R CR$ et $M_1 \twoheadleftarrow_R M_0 \twoheadrightarrow_R M_2$. Alors, $M_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R M_2$ et $M_1 \downarrow_R M$ selon CR. $\Box$

Corollaire 3. *Soit $\rightarrow_R$ confluente. Alors,*

(i) Si $M \overset{*}{\leftrightarrow}_R N$ et N est R-FN, alors $M \twoheadrightarrow_R N$.

(ii) Si $N_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R M \overset{*}{\leftrightarrow}_R N_2$ et N_1, N_2 sont R-FN, alors $N_1 \equiv N_2$.

Preuve : Par Théorème 2 et Corollaire 1.

2 Confluence de $\rightarrow_\beta$ et cohérence de λ

Proposition 2. $\lambda \models M = N$ *ssi* $M \overset{*}{\leftrightarrow}_\beta N$.

Evident.$\Box$

Proposition 3. $\rightarrow_R$ *est confluente ssi* $\twoheadrightarrow_R$ *l'est aussi.*

Evident.$\Box$

Selon la Proposition 3, pour prouver que $\rightarrow_\beta$ est confluente, il suffit de le prouver pour une relation intermédiaire $\rightarrow_I$ telle que

$$\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_I \subseteq \twoheadrightarrow_\beta.$$

Par exemple, on peut prendre la fermeture de $\rightarrow_\beta$ par $\equiv$:

(4.1) $M \equiv N \Longrightarrow M \rightarrow_I N$

(4.2) $M \rightarrow_I N \Longrightarrow \lambda x.\ M \rightarrow_I \lambda x.\ N$
(4.3) $M \rightarrow_I N, M' \rightarrow_I N' \Longrightarrow MM' \rightarrow_I NN'$
(4.4) $M \rightarrow_I N, M' \rightarrow_I N' \Longrightarrow (\lambda x.\ M)M' \rightarrow_I N[x := N']$

Ainsi, $\rightarrow_I$ n'est ni symétrique, ni transitive. Pourtant

$$\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_I \subseteq \twoheadrightarrow_\beta$$

et $\twoheadrightarrow_\beta$ est la fermeture transitive de $\rightarrow_I$. En particulier, $\rightarrow_\beta \subseteq \rightarrow_I$ est impliqué par les propriétés de la substitution du cours précédant.

Au lieu de prouver le théorème fondamental de Church et Rosseer :

Théorème 3. $\rightarrow_R$ *est confluente* $[Church, Rosser]$.

nous citons deux lemmes utilisés dans sa preuve qui expliquent son idée :

Lemme 3. $M \rightarrow_I M', N \rightarrow_I N' \Longrightarrow M[x := N] \rightarrow_I M'[x := N']$.

Preuve : Par récurrence sur (4.1)-(4.4). □

Lemme 4. *(1)* $(\lambda x.\ M) \rightarrow_I N \Longrightarrow N \equiv \lambda x.\ M'$, *où* $M \rightarrow_I M'$.
(2) $MN \rightarrow_I L$ *implique*
soit (2.1) $L \equiv M'N'$, *où* $M \rightarrow_I M'$ *et* $N \rightarrow_I N'$,
soit (2.2) $M \equiv \lambda x.\ P$ *et* $L \equiv P'[x := N']$, *où* $P \rightarrow_I P'$ *et* $N \rightarrow_I N'$.

Preuve : Par récurrence sur (4.1)-(4.4).□

Pour prouver le théorème 3.3 de Church et Rosser, on suppose que

$$M_1 \twoheadleftarrow_I M \twoheadrightarrow_I M_2,$$

et on prouve que dans ce cas il existe un terme M_3 tel que

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "I"] & \\
M_1 \arrow[dr, "I"'] & & M_2 \arrow[dl, "I"] \\
& M_3 &
\end{tikzcd}$$

(par récurrence double sur la définition de M et sur les points (4.1)-(4.4) de définition de $\rightarrow_I$).

Fragment de preuve :
Le cas où $M \equiv PQ$ et où $M \rightarrow_I M_1$ est vrai parce que $M \equiv PQ \rightarrow_I M_1 \equiv P'Q'$ et $P \twoheadrightarrow_I P'$, $Q \twoheadrightarrow_I Q'$ (le cas 4.3).

Selon le Lemme 4 :

dans le cas (2.1) nous avons :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \equiv PQ \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "I"] & \\ M_1 \equiv P'Q' \arrow[d, "\text{déf.4.3}"', "I"] & & M_2 \equiv P''Q'' \arrow[d, "\text{déf.4.3}"', "I"] \\ P'''Q''' \equiv & M_3 & \equiv P'''Q''' \end{tikzcd}$$

Parce que par récurrence :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "I"] & \\ P' \arrow[dr, "I"'] & & P'' \arrow[dl, "I"] \\ & P''' & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "I"] & \\ Q' \arrow[dr, "I"'] & & Q'' \arrow[dl, "I"] \\ & Q''' & \end{tikzcd}$$

dans le cas (2.2) nous avons :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M \equiv (\lambda x.\ P_1)Q \arrow[dl, "(2.1)\ I"'] \arrow[dr, "I\ (2.2)"] & \\ M_1 \equiv (\lambda x.\ P_1')Q' \arrow[d, "\text{déf.4.4}"', "I"] & & M_2 \equiv P_1''[x := Q''] \arrow[d, "\text{lemme 3}"', "I"] \\ P_1'''[x := Q'''] \equiv & M_3 & \equiv P_1'''[x := Q'''] \end{tikzcd}$$

Parce que par récurrence :

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "I"] & \\ P_1' \arrow[dr, "I"'] & & P_2'' \arrow[dl, "I"] \\ & P_1''' & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "I"'] \arrow[dr, "I"] & \\ Q' \arrow[dr, "I"'] & & Q'' \arrow[dl, "I"] \\ & Q''' & \end{tikzcd}$$

□

Corollaire 4. *(i) Si M a une FN N (c.-à-d. $\lambda \models M = N$), alors $M \twoheadrightarrow_\beta N$.*
(ii) Si N est une FN de M, alors elle est unique, un isomorphisme près.

Preuve : (i) $\lambda \models M = N \Longrightarrow M \overset{*}{\leftrightarrow}_\beta N \Longrightarrow M \downarrow_\beta N \Longrightarrow M \twoheadrightarrow_\beta N$ (Corollaire 3).
(ii) $N \twoheadleftarrow_\beta M \twoheadrightarrow_\beta N' \Longrightarrow N \downarrow_\beta N' \Longrightarrow N \equiv N'$ (car N est FN).

Corollaire 5. *λ est cohérente.*

Preuve : Soit $N_1 \not\equiv N_2$ deux FN. Si $\lambda \models N_1 = N_2$, alors $N_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_\beta N_2$ et $N_1 \downarrow_\beta N_2$. d'où $N_1 \equiv N_2$. Contradiction.

Exemple 2. *Soient deux nombres différents de Barendregt : $\lceil i \rceil \neq \lceil j \rceil$. Alors $\lambda \not\models \lceil i \rceil = \lceil j \rceil$.*

Corollaire 6. *Le terme Ω n'a pas de FN.*

Preuve : Supposons $\lambda \models \Omega = N$, où N est FN. Alors, selon corollaire 3.3, $\Omega \twoheadrightarrow_\beta N$. Mais ceci n'est pas possible, car Ω a un seul rédex Ω et $\Omega \rightarrow_\beta \Omega$. Pourtant, Ω lui même n'est pas FN.

3 Lambda-théories

Définition 4. *Une Lambda-théorie $\lambda + \mathcal{T} =_{df} \lambda \cup \mathcal{T}$ où $\mathcal{T}$ est un ensemble d'égalités $M = N$, $M, N \in \Lambda$.*

Exemple 3. η : *$\lambda x.\ Mx = M$, où $x \notin FV(M)$ (η-**conversion**). Alors $\lambda + \eta$ est une Lambda-théorie.*

Exemple 4. ext : $\quad Mx = Nx \Longrightarrow M = N$, *où* $x \notin FV(MN)$ *(***extensionnalité***).*
Dans ce cas $\lambda+$ **ext** *est l'ensemble minimal qui contient* λ *et qui contient l'égalité* $M = N$ *pour toute égalité* $Mx = Nx$, *où* $x \notin FV(MN)$.

On peut comparer les deux Lambda-théories par l'expressivité :

Définition 5. $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_2$ *veut dire que les deux théories sont* **équivalentes** *dans le sens que :*

$$\lambda + \mathcal{T}_1 \models M = N \text{ ssi } \lambda + \mathcal{T}_2 \models M = N.$$

Théorème 4. $[Curri]$ $\quad \eta \equiv$ **ext**.

Preuve : $(\Longrightarrow)$ Soit $Mx = Nx$ et $x \notin FV(MN)$. Alors

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Mx = Nx}{\lambda x.\ Mx = \lambda x.\ Nx \ (c_3) \quad \lambda x.\ Mx = M \ (\eta) \quad \lambda x.\ Nx = N \ (\eta)}}{M = N \ (e_3)}}{ext}$$

$(\Longleftarrow)$ Soit un terme M et $x \notin FV(MN)$. Alors

$$\dfrac{\dfrac{(\lambda x.\ Mx)x = Mx[x := x] = Mx \ (ext)}{\lambda x.\ Mx = M}}{\eta}$$

□

Remarque : λ est cohérente mais $\lambda + \mathcal{T}$, théoriquemment, risque devenir non cohérente.

Notation : $Coh(\mathcal{T})$ **veut dire que** $\lambda + \mathcal{T}$ **est cohérente**.

Par exemple, il faut vérifier $Coh(ext)$ $(\equiv Coh(\eta))$.

Définition 6. *Deux Lambda-termes* M, N *sont* **non comparables** *dans* $\mathcal{T}$ *(notation :* $M \#_{\mathcal{T}} N$*), si* $\neg Coh(\lambda + \mathcal{T} + \{M = N\})$.

Exemple 5. $\mathbf{K} \# \mathbf{S}$ $\quad$ *(c.-à-d.* $\neg Coh(\lambda + \{\mathbf{K} = \mathbf{S}\})$*) :*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{K} = \mathbf{S} \quad (c_1)}{\mathbf{K}XYZ = \mathbf{S}XYZ}}{XZ = XZ(YZ) \quad (\textit{si } X \equiv Z \equiv \mathbf{I})}}{\mathbf{I} = Y\mathbf{I} \quad (\textit{si on choisit } Y \equiv \mathbf{K}M)}}{\mathbf{I} = M \quad (\textit{si on choisit } Y \equiv \mathbf{K}N)}}{\mathbf{I} = N \quad (e_3)}}{M = N}}{\neg Coh(\lambda + \{\mathbf{K} = \mathbf{S}\})}$$

Remarque : Dans la théorie η la notion de la FN est changée par rapport à λ :

Définition 7. *Un* η**-rédex** *est soit de la forme* $(\lambda x.\ M)N$*, soit de la forme* $\lambda x.\ Mx$*, où* $x \notin FV(M)$*. Alors un terme est en* η**-FN** *s'il ne contient aucun* η*-rédex. Un terme* M *a une* η**-FN** *si* $\lambda + \eta \models M = N$ *pour un terme* N *en* η*-FN.*

Exemple 6. *(1)* $\mathbf{K}, \mathbf{S}, \lceil i \rceil$ *sont* η*-FN.*

(2) $\lambda x.\ x(\lambda z.\ xz)$ *n'est pas* η*-FN* ($\lambda z.\ xz$ *est* η*-rédex), mais* $\lambda + \eta \models \lambda x.\ x(\lambda z.\ xz) = \lambda x.\ xx$*, et* $\lambda x.\ xx$ *est* η*-FN.*

Théorème 5. $[Curri]$ M *a* η*-FN ssi* M *a FN.*

Corollaire 7. Ω *n'a pas de* η*-FN dans* η*.*

Théorème 6. $[Church - Rosser]$ $\twoheadrightarrow_{\beta\eta}$ *est confluente.*

Corollaire 8. *(i) Si* M *a une* η*-FN* N*, alors* $M \twoheadrightarrow_{\beta\eta} N$*.*
(ii) Chaque terme a au plus une η*-FN.*
(iii) $Coh(\eta)$*.*

Par ailleurs, η est une extension cohérente maximale de λ dans un sens.

Définition 8. *Une Lambda-théorie* σ *est* **complète dans le sens de Hilbert-Post (HP-complète)** *si pour tous* $M, N \in \Lambda$ *:*

soit $\lambda + \mathcal{T} \models M = N$*, soit* $\neg Coh(\mathcal{T} + \{M = N\})$*.*

Théorème 7. $[Bohm]$ *Soient* $M \not\equiv N$ *deux* η*-FN. Alors* $M \#_\eta N$*.*

Corollaire 9. η *est HP-complète par rapport aux termes qui ont une* η*-FN, c.-à-d. : si* M, N *ont des* η*-FN, alors*

soit $\lambda + \eta \models M = N$*, soit* $\neg Coh(\eta + \{M = N\})$*.*

4 Extension par des fonctions intégrées

Etendons la théorie λ par constantes $\mathcal{C}$. C'est-à-dire, les Lambda-termes sont définis à partir des variables $\mathcal{V}$ et des constantes $\mathcal{C}$. Etant donnée une fonction $f \; : \; (\Lambda)^k \rightarrow \Lambda$, calculée par un algorithme "extérieur" (par exemple, programmée en $C++$), on sélectionne une nouvelle constante $\delta_f \in C$ et on étend λ par les règles de réduction suivantes :

$$\delta_f M_1 ... M_k \rightarrow_\delta f(M_1, ..., M_k) \;\text{ pour tous }\; M_1, ..., M_k \in \Lambda.$$

De cette manière, $\delta_f M_1 ... M_k$ devient un **δ-rédex** et nous obtenons dans l'extension $\lambda + \delta$ une nouvelle δ-FN.

Exemple 7. *On choisit les constantes :*
true, **false**, **not**, **and**, **ite** *(pour "if...then...else")*
et introduit les δ-réductions suivantes :
not true $\rightarrow$ **false**
not false $\rightarrow$ **true**
and true true $\rightarrow$ **true**
and true false $\rightarrow$ **false**
and false true $\rightarrow$ **false**
and false false $\rightarrow$ **false**
ite true $\rightarrow \mathbf{T} \equiv \lambda xy.\, x$
ite false $\rightarrow \mathbf{F} \equiv \lambda xy.\, y$
Avec ces réductions on obtient :
ite true $MN \rightarrow_{\beta\delta} \mathbf{T}MN \rightarrow_\beta M$
ite false $MN \rightarrow_{\beta\delta} \mathbf{F}MN \rightarrow_\beta N$

De cette manière on peut étendre λ par l'arithmétique : par exemple, on peut introduire les entiers $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ et introduire les opérations **plus**, **minus**, **times**, **divide**, **equal**, **error** et les δ-réductions correspondantes :
plus $ij \rightarrow i + j$
divide $ij \rightarrow i/j$, si $j \neq 0$, et
divide $i0 \rightarrow$ **error**
plus i **error** $\rightarrow$ **error**,... etc.

Théorème 8. $[Mitschke]$ *Pour toute fonction f intégrée, la réduction $\twoheadrightarrow_{\beta\delta_f}$ est CR, et donc $\beta + \delta_f$ est cohérente.*

Corollaire 10. *Si $M \twoheadrightarrow_{\beta\delta} N$ et N_0 est une δ-FN de N, alors $M \twoheadrightarrow_{l\beta\delta} N_0$, où $\twoheadrightarrow_{l\beta\delta}$ est la réduction $\beta\delta$* **gauche** *: à chaque pas le rédex gauche est réduit.*

Pour transformer $\lambda + \delta$ en un langage de programmation fonctionnelle il reste d'adapter sa syntaxe :

Exemple 8. *(1)* **Let** $x = M$ **in** E *correspond à :*
$(\lambda x.\, E)M$ *ou bien à* $E[x := M]$

(2) **Letrec** $f\overline{x} = C[f, \overline{x}]$ **in** E *correspond à :*
Let $f = \Theta(\lambda f\overline{x}.\ C[f, \overline{x}])$ **in** E*, c'est-à-dire à :*
$(\lambda f.\ E)(\Theta(\lambda f\overline{x}.\ C[f, \overline{x}])$*,*
où Θ *est un autre combinateur de point fixe qui a la propriété* $\Theta M \twoheadrightarrow_\beta M(\Theta M)$*.*

Remarque : Le combinateur de Church **Y** a une propriété plus faible : $\lambda \models \mathbf{Y}M = M(\mathbf{Y}M)$, c'est-à-dire $\mathbf{Y}M \overset{*}{\leftrightarrow}_\beta M(\mathbf{Y}M)$.

Théorème 9. [*Turing*] *Soit* $\Theta \equiv AA$*, où* $A \equiv \lambda xy.\ y(xxy)$*. Alors*

$$\Theta M \twoheadrightarrow_\beta M(\Theta M) \text{ pour tout } M \in \Lambda.$$

De cette manière, on transforme λ en MIRANDA, CAML et autres.

5 Sémantique dénotationnelle de λ

5.1 Lambda-calcul typé

Types : $T := T_0 \mid T \rightarrow T$, où T_0 est un ensemble de types **primitifs**
Variables : V^τ pour tout $\tau \in T$ $(V^{\tau_1} \cap V^{\tau_2} = \emptyset,\ \ \tau_1 \neq \tau_2)$
Constantes : C^τ pour tout $\tau \in T$ (le même)
Termes :
(i) $V^\tau \cup C^\tau \subset \mathcal{T}^\tau$
(ii) $\dfrac{t_1 \in \mathcal{T}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2}, t_2 \in \mathcal{T}^{\tau_1}}{t_1 t_2 \in \mathcal{T}^{\tau_2}}$
(iii) $\dfrac{v \in V^{\tau_1}, t \in \mathcal{T}^{\tau_2}}{\lambda v.\ t \in \mathcal{T}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2}}$
Remarque : On renomme les variables liées en préservant leur types.

5.2 Modèle du Lambda-calcul typé

$\tau \in T_0$ étant un **type primitif**, soit $D^\tau \neq \emptyset$ un **domaine**.
Alors, nous allons définir :

$$\mathcal{D}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2} =_{df} (\mathcal{D}^{\tau_2})^{\mathcal{D}^{\tau_1}} \quad (\textit{fonctions totales}\ :\ \mathcal{D}^{\tau_1} \rightarrow \mathcal{D}^{\tau_2})$$

Une **valuation** est une substitution Θ telle que

$$\Theta(v) \in \mathcal{D}^\tau,\ \textit{si}\ v \in \mathcal{V}^\tau.$$

Un **modèle** $\mathcal{M}$ de Lambda calcul type est $\mathcal{M} = ((\mathcal{D}^\tau)_{\tau \in T}, \| \circ \|)$, où pour une valuation Θ donnée :
(i) $\| v \|^\Theta_\mathcal{M} = \Theta(v)$ pour $v \in \mathcal{V}^\tau, \tau \in T$
(ii) $\| c \|^\Theta_\mathcal{M} \in \mathcal{D}^\tau$, si $c \in \mathcal{C}^\tau$
(iii) $\| t_1\ t_2 \|^\Theta_\mathcal{M} = \| t_1 \|^\Theta_\mathcal{M} (\| t_2 \|^\Theta_\mathcal{M})$, si $t_1 \in \mathcal{T}^{\tau_1 \rightarrow \tau_2}$ et $t_2 \in \mathcal{T}^{\tau_1}$
(iv) $\| \lambda v.\ t \|^\Theta_\mathcal{M} = f \in (\mathcal{D}^{\tau_2})^{\mathcal{D}^{\tau_1}}$, si $v \in \mathcal{V}^{\tau_1}, t \in \mathcal{T}^{\tau_2}$,

$$\text{et} \quad f(d) = \| t \|_{\mathcal{M}}^{\Theta'}, \quad \text{où} \quad \Theta'(z) = \begin{cases} d, & si \quad z = v \\ \Theta(z), & si \quad z \neq v \end{cases}$$

pour tout $d \in \mathcal{D}^{\tau_1}$.

Théorème 10. $\| t \|_{\mathcal{M}}^{\Theta} \in \mathcal{D}^{\tau}$ *pour tout terme* $t \in \mathcal{T}^{\tau}$ *et toute valuation* Θ.

5.3 Modèle du Lambda-calcul

Le problème avec un modèle pour Lambda-calcul non-typé est qu'il faut que $D \cong D^D$ (D isomorphe à D^D) soit vrai pour le domaine D de ce modèle. Ceci est impossible pour les raisons de cardinalité. D. Scott a trové une solution : il a limité D aux sous-ensembles des fonctions *continues* sur D muni d'une toplogie naturelle. Il a construit dans une catégorie des espaces topologiques cartesiens sur les treillis complets un ensemble des fonctions continues $D_0 \cong D_0^{D_0}$. On peut trouver sa construction dans le livre de Barendregt cité.